ÜBER DIE BERNSTEINSCHE THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG VOM ELLIPTISCHEN TYPUS

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

HERBERT VON DENFFER
AUS NARWA

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 19. JULI 1934
TAG DER PROMOTION: 8. FEBRUAR 1935

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

62

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. HAMMERSTEIN
PROFESSOR DR. BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band II

Einleitung.

Im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus sind die linearen Fälle schon ziemlich genau untersucht. Die Resultate stellen sich hier dar als Verallgemeinerungen entsprechender Sätze über Potentialfunktionen. Die nichtlinearen Gleichungen sind jedoch noch wenig erforscht. Hier gibt es mehrere Untersuchungen über einzelne Fragen, vor allem hat S. BERNSTEIN sich mit diesem Gebiet beschäftigt.[1]) In seinen Arbeiten ist eine Theorie der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen von großer Allgemeinheit enthalten. Die Grundlagen seiner Untersuchungen bilden das klassische Verfahren der sukzessiven Approximationen sowie ein ihm nachgebildetes Verfahren der analytischen Fortsetzung nach einem Parameter. Alles weitere ist eigentlich nur geschickte Rechnung, worin BERNSTEIN ein Meister ist.[2])

Die Anwendung der sukzessiven Approximationen auf die lineare Gleichung

$$\Delta z + a z_x + b z_y + c z = d, \qquad z = z(x, y)$$

besteht darin, daß eine Folge von Funktionen $z_n(x, y)$ aus

$$\Delta z = -a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - c z_{n-1}$$

bestimmt wird. Mittels dieser Gleichung kann aus den Eigenschaften von z_{n-1} auf die von z_n geschlossen werden, und das muß so

1) Hauptsächlich in den Arbeiten: Math. Ann. 59, 62, 69, 95 und 96. Daneben wären noch zu nennen: Comm. de la Soc. Math. de Charkow 11, Ann. de l'Éc. Norm. 27 und 29.

2) So bestehen seine Arbeiten in der Hauptsache aus einer häufigen Wiederholung der genannten Methoden und weitläufigen Rechnungen und Abschätzungen, um das Verfahren jedesmal zur Konvergenz zu bringen. Dem Leser wird auch noch allerhand zu rechnen überlassen. Die Übersichtlichkeit der Bernsteinschen Theorie ist so nicht groß, und vor allem fällt es schwer, sich davon zu überzeugen, ob die Schlußweise auch im einzelnen einwandfrei und lückenlos ist. Zweifel sind daher auch schon in der Literatur geäußert worden (Ch. H. Müntz, Math. Ann. 94, und L. Lichtenstein, Enzyklopädieartikel II/C 12, S. 1326 Anm. 127 u. S. 1328). In der Tat ist seine Gedankenführung nicht immer zwingend, und er hat sich auch selbst mehrfach genötigt gesehen, sie durch Nachträge zu ergänzen.

geschehen, daß die Reihe $\sum z_n$ samt den formal gebildeten ersten und zweiten Ableitungen gleichmäßig konvergiert. Am nächsten würde es liegen, aus dem absoluten Betrag von z_{n-1} und seinen Ableitungen auf den von z_n nebst Ableitungen zu schließen. Das erweist sich indes als unzweckmäßig, und man muß den Betrag durch einen anderen Begriff ersetzen. Schon PICARD hatte in seinen klassischen Untersuchungen die trigonometrische Entwicklung von z_n herangezogen:

$$z_n(x, y) = \sum_\nu A_\nu(\varrho)\cos\nu\vartheta + B_\nu(\varrho)\sin\nu\vartheta. \quad (x = \varrho\cos\vartheta,\ y = \varrho\sin\vartheta)$$

Hier knüpft BERNSTEIN an und führt den Begriff

$$\sum_\nu \left(\operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho \leqq R} |A_\nu(\varrho)| + \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho \leqq R} |B_\nu(\varrho)| \right)$$

ein, den er den *trigonometrischen Modul* der Funktion z_n nennt. Dieser Begriff erweist sich als stark genug, um mit ihm solche Eigenschaften für die Lösungen linearer Differentialgleichungen herzuleiten, daß man nachher mit sukzessiven Approximationen für nichtlineare Gleichungen zum Ziel kommt. Die Benutzung dieses Begriffs bei den sukzessiven Approximationen und verwandten Schlußweisen ist das eigentlich Wesentliche an BERNSTEINS Methode.

BERNSTEIN selbst gebraucht für seine Betrachtungen noch einen anderen, sehr komplizierten Begriff, den er *norme inférieure* nennt. Im folgenden suche ich zu zeigen, daß man in einfacherer Weise zum Ziele gelangt, indem man die *norme inférieure* vermeidet und durch eine *Erweiterung des trigonometrischen Moduls* ersetzt. Zunächst behandele ich mit dem trigonometrischen Modul die linearen Gleichungen und beweise für ihre Lösungen diejenigen Eigenschaften, die für später nötig sind. Dann zeige ich mit der BERNSTEINschen Methode: *Ist die Randwertaufgabe der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y; \alpha\right) = 0$$

lösbar für einen gewissen Wert α_0 des Parameters α, so ist sie es auch für alle Werte einer Umgebung $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$. Man kann den Parameter auch in die Randwerte einführen. Mit derselben Methode ist auch der analytische Charakter der Lösung einer nichtlinearen Gleichung beweisbar sowie eine Reihe weiterer Resultate. Auf die Ausführung ist jedoch im folgenden verzichtet.

§ 1. Die Gleichung $\Delta v = d$.[3]

Sei $f(x, y)$ definiert für $R'^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2$, und es sei dort

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho) \cos n\vartheta + B_n(\varrho) \sin n\vartheta . \qquad (x = \varrho\cos\vartheta,\ y = \varrho\sin\vartheta$$

Wenn dann die Reihe

$$(1) \qquad |f|_{R'R} = \sum_{0}^{\infty} \operatorname*{Max}_{R' \leqq \varrho \leqq R} |A_n(\varrho)| + \operatorname*{Max}_{R' \leqq \varrho \leqq R} |B_n(\varrho)|$$

konvergiert, so soll dieser Ausdruck $|f|_{R'R}$ der *trigonometrische Modul* oder kurz der *Modul* von f heißen. Dabei seien die beiden Grenzfälle $R' = 0$ und $R' = R$ zugelassen. Aus der Definition des Moduls erhält man sofort

$$(2) \qquad \begin{cases} |f_1 + f_2|_{R'R} \leqq |f_1|_{R'R} + |f_2|_{R'R}, \\ |f_1 \cdot f_2|_{R'R} \leqq |f_1|_{R'R} \cdot |f_2|_{R'R}. \end{cases}$$

Der Modul existiert stets, wenn $f(x, y)$ stetige beschränkte zweite Ableitungen nach ϑ hat. Denn aus

$$A_n(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta$$

erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$A_n(\varrho) = \frac{-1}{\pi n^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 f(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} \cos n\vartheta \, d\vartheta ;$$

ist M eine Schranke für $\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2}$, so erhält man also

$$|A_n| \leqq \frac{2}{n^2} M$$

und, da das gleiche für $|B_n|$ gilt,

$$|f|_{R'R} = \sum \operatorname{Max} |A_n| + \operatorname{Max} |B_n| \leqq \frac{2\pi^2}{3} M,$$

$$(3) \qquad |f|_{R'R} < 7M.$$

Satz 1. *Sei $d(x, y)$ definiert für*[4] $0 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2 \leqq 1$; $|d|_{0R}$ *möge existieren, $v(x, y)$ möge die Gleichung $\Delta v = d$ für $x^2 + y^2 \leqq R^2$ bei der Randbedingung $v = 0$ für $x^2 + y^2 = R^2$ erfüllen. Dann gilt,*

3) Vgl. zu diesem Paragraphen: S. Bernstein, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet* I, Math. Ann. 62 (1906), 253—271.

4) Die Annahme $R \leqq 1$ dient nur zur Vereinfachung der späteren Bezeichnungsweise.

falls ε $(0<\varepsilon\leqq R)$ *beliebig und* l_1 *ein fester, unabhängiger Zahlenwert ist,*

$$(4)\quad \begin{cases} |v|_{0R} < l_1 R^2 |d|_{0R}, \\ |v_x|_{0R} < l_1 R |d|_{0R}, \quad |v_y|_{0R} < l_1 R |d|_{0R}, \\ |v_{xx}|_{\varepsilon R} < \frac{l_1}{\varepsilon} |d|_{0R}, \quad |v_{xy}|_{\varepsilon R} < \frac{l_1}{\varepsilon} |d|_{0R}, \quad |v_{yy}|_{\varepsilon R} < \frac{l_1}{\varepsilon} |d|_{0R}. \end{cases}$$

Beweis: Setzt man

$$d = \sum_0^\infty A_n(\varrho)\cos n\vartheta + B_n(\varrho)\sin n\vartheta, \quad v = \sum_0^\infty C_n(\varrho)\cos n\vartheta + D_n(\varrho)\sin n\vartheta,$$

so folgen die von PICARD angegebenen Formeln

$$(5)\quad \begin{cases} 2nC_n = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho \\ 2\frac{dC_n}{d\varrho} = \varrho^{n-1} \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho + \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho \end{cases} (n \geqq 1)$$

$$\frac{dC_0}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho A_0 \varrho\, d\varrho.$$

Ist nun $a_n = \operatorname{Max}_{0\leqq\varrho\leqq R} |A_n|$, so folgt für die erste der Formeln (5) für $n \geqq 3$

$$\left| \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho \right| \leqq \varrho^n a_n \int_\varrho^R \frac{d\varrho}{\varrho^{n-1}} < \frac{\varrho^2 a_n}{n-2} < \frac{2\varrho^2 a_n}{n},$$

$$\left| \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho \right| \leqq \frac{a_n}{\varrho^n} \int_0^\varrho \varrho^{n+1} d\varrho = \frac{\varrho^2 a_n}{n+2} < \frac{\varrho^2 a_n}{n},$$

$$\left| \frac{\varrho^n}{R^n} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho \right| \leqq \frac{\varrho^n a_n}{R^{2n}} \int_0^R \varrho^{n+1} d\varrho < \frac{\varrho^2 a_n}{n};$$

$$2n|C_n| < \frac{4\varrho^2 a_n}{n}, \quad |C_n| < \frac{2\varrho^2 a_n}{n^2}.$$

Ferner ist nach (5) $\frac{dC_n}{d\varrho} = \frac{nC_n}{\varrho}$, also hat man die Abschätzungen

$$(6)\quad |C_n| < \frac{2\varrho^2 a_n}{n^2}, \quad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{2\varrho a_n}{n}. \quad \text{(Entsprechend für } D_n.)$$

Hieraus folgt (4), wenn man vorläufig (6) auch für $n<3$ benutzt. Denn

$$|v|_{0R} = \sum_n \operatorname{Max}_{0\leqq\varrho\leqq R} |C_n| + \operatorname{Max}_{0\leqq\varrho\leqq R} |D_n| < 4R^2 \sum_n \operatorname{Max} |A_n| + \operatorname{Max} |B_n|$$
$$= 4R^2 |d|_{0R}.$$

Für die ersten Ableitungen, z. B. $v_x = v_\varrho \cos\vartheta + \frac{v_\vartheta}{\varrho}\sin\vartheta$, ist

$$v_\varrho = \sum_0^\infty \frac{dC_n}{d\varrho}\cos n\vartheta + \frac{dD_n}{d\varrho}\sin n\vartheta, \quad \frac{v_\vartheta}{\varrho} = \sum_1^\infty -\frac{n}{\varrho}C_n \sin n\vartheta + \frac{n}{\varrho}D_n \cos n\vartheta,$$

also mit (6)

$$|v_\varrho|_{0R} < 4R\sum_n \mathrm{Max}|A_n| + \mathrm{Max}|B_n| = 4R|d|_{0R}, \quad \left|\frac{v_\vartheta}{\varrho}\right|_{0R} < 4R|d|_{0R}.$$

Daher folgt mit (2)

$$|v_x|_{0R} < 8R|d|_{0R} \quad \text{und genau so} \quad |v_y|_{0R} < 8R|d|_{0R}.$$

Für die zweiten Ableitungen ist z. B.

$$v_{xx} = v_{\varrho\varrho}\cos^2\vartheta - \frac{2v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}\sin^2\vartheta + \frac{v_\varrho}{\varrho}\sin^2\vartheta + \frac{2v_\vartheta}{\varrho^2}\cos\vartheta\sin\vartheta.$$

Wegen $\Delta v = d$ ist $v_{\varrho\varrho} = d - \frac{v_\varrho}{\varrho} - \frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}$, also

$$v_{xx} = d\cos^2\vartheta - \frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}\sin 2\vartheta - \frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}\cos 2\vartheta - \frac{v_\varrho}{\varrho}\cos 2\vartheta + \frac{v_\vartheta}{\varrho^2}\sin 2\vartheta.$$

Weiter ist

$$\frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho} = \sum -\frac{n}{\varrho}\frac{dC_n}{d\varrho}\sin n\vartheta + \frac{n}{\varrho}\frac{dD_n}{d\varrho}\cos n\vartheta,$$

$$\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2} = \sum -\frac{n^2}{\varrho^2}C_n\cos n\vartheta \quad -\frac{n^2}{\varrho^2}D_n\sin n\vartheta,$$

$$\frac{v_\varrho}{\varrho} = \sum \frac{1}{\varrho}\frac{dC_n}{d\varrho}\cos n\vartheta \quad +\frac{1}{\varrho}\frac{dD_n}{d\varrho}\sin n\vartheta,$$

$$\frac{v_\vartheta}{\varrho^2} = \sum -\frac{n}{\varrho^2}C_n\sin n\vartheta \quad +\frac{n}{\varrho^2}D_n\cos n\vartheta.$$

Daher erhält man mit (6)

$$\left|\frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}\right|_{0R} < 4|d|_{0R}, \quad \left|\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}\right|_{0R} < 4|d|_{0R}, \quad \left|\frac{v_\varrho}{\varrho}\right|_{0R} < 4|d|_{0R}, \quad \left|\frac{v_\vartheta}{\varrho^2}\right|_{0R} < 4|d|_{0R}$$

und folglich, wieder mit (2), $|v_{xx}|_{0R} < 17|d|_{0R}$ und dasselbe für v_{xy} und v_{yy}.

Hiermit wären die Beziehungen (4) sogar in einer viel schöneren Form bewiesen. Indes ist in (6) noch nicht $n < 3$ berücksichtigt. Für $n = 1$ und 2 erhält man in (6) noch rechts je ein Zusatzglied, es ist nämlich

$$4|C_2| < \frac{2\varrho^2 a_2}{4} + \left|\varrho^2\int_R^\varrho \frac{A_2}{\varrho}d\varrho\right|, \quad 2\left|\frac{dC_2}{d\varrho}\right| < \frac{2\varrho a_2}{2} + \left|\varrho\int_R^\varrho \frac{A_2}{\varrho}d\varrho\right|,$$

während für $n = 1$ das Zusatzglied

$$\left| \varrho \int_R^\varrho A_1 d\varrho + \frac{\varrho}{R^2} \int_R^\varrho A_1 \varrho^2 d\varrho \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| \int_R^\varrho A_1 d\varrho + \frac{1}{R^2} \int_0^\varrho A_1 \varrho^2 d\varrho \right|$$

lautet. Abschätzung der Zusatzglieder ergibt

$$\left| \int_R^\varrho \frac{A_2}{\varrho} d\varrho \right| < \frac{R a_2}{\varrho}, \quad \left| \int_R^\varrho A_1 d\varrho \right| < R a_1, \quad \left| \int_0^R A_1 \varrho^2 d\varrho \right| < R_1^3 a_1.$$

Also gelten für $n < 3$ die Formeln

$$(7) \qquad \begin{cases} |C_n| < \varrho a_n, & \left| \frac{dC_n}{d\varrho} \right| < a_n, \\ |C_0| \leqq \frac{R^2 a_0}{2}, & \left| \frac{dC_0}{d\varrho} \right| \leqq \frac{R a_0}{2}. \end{cases} \qquad (n = 1, 2)$$

Setzt man dies in die Fourierentwicklungen von v, v_ϱ, $\frac{v_\vartheta}{\varrho}$ ein, so folgen dieselben Beziehungen wie für $n \geqq 3$, während durch Einsetzen in $\frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}$, $\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}$, $\frac{v_\varrho}{\varrho}$, $\frac{v_\vartheta}{\varrho^2}$ die drei letzten Beziehungen (4) in der milderen Form

$$|v_{xx}|_{\varepsilon R} < \frac{17}{\varepsilon} |d|_{0R}, \quad |v_{xy}|_{\varepsilon R} < \frac{17}{\varepsilon} |d|_{0R}, \quad |v_{yy}|_{\varepsilon R} < \frac{17}{\varepsilon} |d|_{0R}$$

folgen. Es wird also $l_1 = 17$.

Nun wäre es aber für alles folgende sehr wichtig, die Ungleichungen (4) auch für die zweiten Ableitungen in der verschärften Form zu erhalten, also z. B. $|v_{xx}|_{0R} < \lambda |d|_{0R}$ mit unabhängigem λ. Die Herleitung einer solchen Beziehung scheiterte nun lediglich an den Zusatzgliedern in (6) für $n = 1$ und $n = 2$. Indes gehen in die Fourierentwicklung von v_{xx} diese störenden Zusatzglieder höchstens am Anfang ein; ist z. B.

$$v_{xx} = \sum_n C_n'' \cos n\vartheta + D_n'' \sin n\vartheta,$$

so folgt aus der Darstellung von v_{xx} durch $\frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}$, $\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}$ usw., daß höchstens noch C_4'' gestört werden kann, während C_n'' für $n > 4$ unbeeinflußt bleibt.

Also würde es genügen, $|C_n''| < \lambda |d|_{0R}$ für $n \leqq 4$ zu beweisen, und wegen

$$C_n'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_{xx} \cos n\vartheta \, d\vartheta,$$

also $|v_{xx}| < \lambda |d|_{0R}$, und wegen (4) genügt es weiter, dabei v_{xx} nur in der Umgebung des Nullpunktes zu betrachten ($0 \leqq \varrho \leqq \varepsilon$).

Dieser Beweis ist nur möglich, wenn man den Modulbegriff ein wenig erweitert.[5]) Ist $z = x + iy$, so liefert z. B.

$$\frac{z}{R} = \frac{2z' + R}{z' + 2R} \tag{8}$$

eine konforme Abbildung des Kreises $x^2 + y^2 \leqq R^2$ auf sich, wobei $z' = 0$ in $z = \frac{1}{2}R$ übergeht (und $z = 0$ in $z' = -\frac{1}{2}R$). Setzt man $z' = x' + iy'$, so sind $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ zwei Potentialfunktionen, deren 1. bis 4. Ableitungen unter einer festen Schranke S liegen. Das gleiche gilt für $x(x', y')$, $y(x', y')$. Trägt man $x = x(x', y')$, $y = y(x', y')$ in $d(x, y)$ ein, so werde vorausgesetzt, daß $|d(x', y')|_{0R}$ existiert, *wobei der Modul in bezug auf x', y' als Variable gemeint ist*, d. h. ist $x' = \varrho' \cos \vartheta'$, $y' = \varrho' \sin \vartheta'$, also $d = \sum A_n' \cos n\vartheta' + B_n' \sin n\vartheta'$, so wird

$$|d(x', y')|_{0R} = \sum \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho' \leqq R} |A_n'| + \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho' \leqq R} |B_n|.$$

Nun definiere man als *erweiterten Modul* den Ausdruck

$$\|d\|_R = \operatorname{Max}\left(|d(x, y)|_{0R},\ |d(x', y')|_{0R}\right), \tag{9}$$

der also für einen Kreis definiert ist, nicht für einen Kreisring. Für ihn gelten natürlich ebenfalls die Beziehungen (2). Ist ferner N eine Schranke der 2. Ableitungen von d, so folgt analog zu (3)

$$\|d\|_R < 3N,$$

während die Ungleichungen (4) jetzt in verschärfter Form gelten:

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 1 gilt mit einem vollkommen unabhängigen λ*

$$\begin{cases} \|v\|_R < \lambda R^2 \|d\|_R, & \|v_x\|_R < \lambda R \|d\|_R, & \|v_y\|_R < \lambda R \|d\|_R, \\ \|v_{xx}\|_R < \lambda \|d\|_R, & \|v_{xy}\|_R < \lambda \|d\|_R, & \|v_{yy}\|_R < \lambda \|d\|_R. \end{cases} \tag{10}$$

Beweis: Angenommen, es existiere schon eine Beziehung

$$|v_{xx}| < \lambda \|d\|_R, \quad \|v_{xy}| < \lambda \|d\|_R, \quad |v_{yy}| < \lambda \|d\|_R. \tag{11}$$

Mit $v_{x'} = v_x \frac{\partial x}{\partial x'} + v_y \frac{\partial y}{\partial x'}$ usw. und der Schranke S für $\frac{\partial x}{\partial x'}, \cdots, \frac{\partial^2 y}{\partial y'^2}$ folgen damit zunächst für ein gewisses λ

$$|v_{x'x'}| < \lambda \|d\|_R, \quad |v_{x'y'}| < \lambda \|d\|_R, \quad |v_{y'y'}| < \lambda \|d\|_R. \tag{11a}$$

Nun war oben gezeigt, daß aus $|v_{xx}| < \lambda |d|_{0R}$ für den gewöhnlichen Modul $|v_{xx}|_{0R} < \lambda |d|_{0R}$ folgen würde. Die dortige Betrachtung gilt offenbar unverändert, wenn man $|d|_{0R}$ durch $\|d\|_R$ ersetzt, also

5) Bei Bernstein geschieht dies auf ganz andere Art durch Einführung der *norme inférieure*. Vgl. die Einleitung.

folgt aus (11) (die gewöhnlichen Moduln von $v(x, y)$ usw. auf x, y als Variable bezogen)

$$|v(x,y)|_{0R} < \lambda \|d\|_R, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}\right|_{0R} < \lambda \|d\|_R,$$

ebenso folgt aus (11a) (die gewöhnlichen Moduln auf x', y' als Variable bezogen)

$$|v(x',y')|_{0R} < \lambda \|d\|_R, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial^2 v(x',y')}{\partial y'^2}\right|_{0R} < \lambda \|d\|_R.$$

Hieraus folgt wieder mit der Schranke S in bezug auf x', y' als Variable

$$|v(x',y')|_{0R} < \lambda \|d\|_R, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial^2 v(x',y')}{\partial y^2}\right|_{0R} < \lambda \|d\|_R.$$

Nun folgt (10) unmittelbar aus der Definition des erweiterten Moduls für v, v_x, ..., v_{xy}, so daß man nur noch (11) beweisen muß.

Sei nun K ein kleiner Kreis um $x = y = 0$. Nach (4) gilt dann (11) für das Gebiet außerhalb von K.

Durch die Transformation (8) geht K in einen Kreis K' der x', y'-Ebene über. (11) gilt also für alle x', y' außerhalb K'. Ist K nicht von vornherein zu groß gewählt, so enthält K' nicht den Ursprung der x', y'-Ebene. Sei dann K_0' ein kleiner Kreis um diesen, so daß K' und K_0' sich ausschließen, dann gelten wieder nach (4) außerhalb K_0' die Ungleichungen (11), also gelten sie insbesondere innerhalb von K'. (11) sind also außerhalb und innerhalb von K' richtig.

Satz 3. *Sei $d(x, y)$ im Kreisringe $R_1^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq R_2^2$ definiert, $|d|_{R_1 R_2}$ möge existieren. $v(x, y)$ sei ebendort definiert und möge im Innern $\Delta v = d$ erfüllen; auf dem Rande sei $v(R_1) = v(R_2) = 0$. Dann gilt*

$$(12)\begin{cases} |v|_{R_1R_2} < l_2 (R_2 - R_1)\, |d|_{R_1R_2}, \\ |v_x|_{R_1R_2} < l_2 (R_2 - R_1)\, |d|_{R_1R_2}, \quad |v_y|_{R_1R_2} < l_2 (R_2 - R_1)\, |d|_{R_1R_2}, \\ |v_{xx}|_{R_1R_2} < \frac{l_2}{R_1^2}\, |d|_{R_1R_2}, \quad |v_{xy}|_{R_1R_2} < \frac{l_2}{R_1^2}\, |d|_{R_1R_2}, \quad |v_{yy}|_{R_1R_2} < \frac{l_2}{R_1^2}\, |d|_{R_1R_2}. \end{cases}$$

Nimmt man noch $R_2 < 1$ an, so ist wieder l_2 von nichts abhängig.

Beweis: Man kann wieder setzen

$$d = \sum_n A_n(\varrho) \cos n\vartheta + B_n(\varrho) \sin n\vartheta, \quad v = \sum_n C_n(\varrho) \cos n\vartheta + D_n(\varrho) \sin n\vartheta.$$

In Erweiterung der PICARDschen Formeln (5) gelten dann die Formeln von BERNSTEIN[3])

$$
(13)\quad
\begin{cases}
2n\,(R_2^{2n}-R_1^{2n})\,C_n=\left(\varrho^{n+1}-\dfrac{R_2^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right)\displaystyle\int_{R_1}^{\varrho}A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\;\;\varrho^n\right)d\varrho \\
\qquad\qquad +\left(\varrho^{n+1}-\dfrac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right)\displaystyle\int_{\varrho}^{R_2}A_n\left(\frac{R_2^{2n}}{\varrho^n}\;\;\varrho^n\right)d\varrho \qquad (n>1) \\
2n\,(R_2^{2n}-R_1^{2n})\dfrac{dC_n}{d\varrho}=\left((n+1)\varrho^n+(n-1)\dfrac{R_2^{2n}}{\varrho^n}\right)\displaystyle\int_{R_1}^{\varrho}A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}-\varrho^n\right)d\varrho \\
\qquad\qquad +\left((n+1)\varrho^n+(n-1)\dfrac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right)\displaystyle\int_{\varrho}^{R_2}A_n\left(\frac{R_2^{2n}}{\varrho^n}-\varrho^n\right)d\varrho\,, \qquad (n\geqq 1) \\
C_0=\displaystyle\int_{R_2}^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_{R_1}^{\varrho}A_0\varrho\,d\varrho\,, \qquad \dfrac{dC_0}{d\varrho}=\frac{1}{\varrho}\displaystyle\int_{R_1}^{\varrho}A_0\varrho\,d\varrho\,.
\end{cases}
$$

Durch ähnliche Abschätzungen wie bei Satz 1 erhält man für $n\geqq 2$ mit $a_n=\underset{R_1\leqq\varrho\leqq R_2}{\mathrm{Max}}|A_n|$ und $b_n=\underset{R_1\leqq\varrho\leqq R_2}{\mathrm{Max}}|B_n|$

$$
(14)\qquad |C_n|\leqq\frac{2\varrho^2 a_n}{n^2}\left(1-\frac{R_1^{n+1}}{R_2^{n+1}}\right),\quad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|\leqq\frac{2\varrho a_n}{n}\left(1-\frac{R_1^{n+1}}{R_2^{n+1}}\right)
$$

und hieraus die schwächere Abschätzung

$$
(15)\qquad |C_n|\leqq\frac{3\varrho a_n}{n}(R_2-R_1),\quad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|\leqq 2a_n(R_2-R_1).
$$

Für $n=1$ gilt (15) auch noch, während man für $n=0$

$$
C_0\leqq\frac{a_0}{2}(R_2-R_1)
$$

hat. Nun ist wegen (15)

$$
|v|_{R_1R_2}=\sum_n\underset{R_1\leqq\varrho\leqq R_2}{\mathrm{Max}}|C_n|+\mathrm{Max}\,|D_n|\leqq\frac{a_0}{2}(R_2-R_1)
$$
$$
+\sum_1^{\infty}3(R_2-R_1)\,(a_n+b_n)\leqq 3(R_2-R_1)\,|d|_{R_1R_2};
$$

ebenso folgt aus (15)

$$
|v_\varrho|_{R_1R_2}\leqq\sum_1^{\infty}\mathrm{Max}\left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|+\mathrm{Max}\left|\frac{dD_n}{d\varrho}\right|
$$
$$
\leqq\sum_1^{\infty}2(R_2-R_1)\,(a_n+b_n)\leqq 2(R_2-R_1)\,|d|_{R_1R_2},
$$

$$
\left|\frac{v_\vartheta}{\varrho}\right|_{R_1R_2}\leqq\sum_1^{\infty}\mathrm{Max}\,\frac{n}{\varrho}|C_n|+\mathrm{Max}\,\frac{n}{\varrho}|D_n|\leqq 3(R_2-R_1)\,|d|_{R_1R_2},
$$

also $\qquad |v_x|\leqq 5(R_2-R_1)\,|d|_{R_1R_2},\quad |v_y|\leqq 5(R_2-R_1)\,|d|_{R_1R_2}.$

Für die zweiten Ableitungen erhält man nach (14)

$$|v_{\varrho\vartheta}|_{R_1R_2} < 2|d|_{R_1R_2}, \quad |v_{\vartheta\vartheta}|_{R_1R_2} < 3|d|_{R_1R_2}.$$

Aus der Darstellung von v_{xx} durch $\frac{v_{\varrho\vartheta}}{\varrho}$, $\frac{v_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2}$, $\frac{v_\varrho}{\varrho}$, $\frac{v_\vartheta}{\varrho^2}$ findet man danach $|v_{xx}|_{R_1R_2} < \frac{11}{R_1^2}|d|_{R_1R_2}$, ebenso v_{xy} und v_{yy}. Es wird also $l_2 = 11$.

§ 2. Die Gleichung $\Delta z + az_x + bz_y + cz = d$.[3])

Satz 4. *Sei* $L(z) = \Delta z + a(x, y)\, z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z$, *wo* $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ *für* $x^2 + y^2 \leqq R^2$ *definiert seien und im Innern stetige und beschränkte zweite Ableitungen haben mögen. Ferner sei* $c \leqq 0$ *und* $M \geqq \operatorname{Max}(|a|_R, |b|_R, |c|_R)$. *Wenn dann* $z(x, y)$ *die Gleichung* $L(z) = d$ *für* $x^2 + y^2 < R^2$ *bei der Randbedingung* $z = 0$ *für* $x^2 + y^2 = R^2$ *erfüllt, so gilt für die erweiterten Moduln*

$$(16) \quad \begin{cases} |z|_R < \mu_1 \|d\|_R, \\ \|z_x|_R < \mu_1 \|d\|_R, \quad \|z_y|_R < \mu_1 \|d\|_R, \\ \|z_{xx}|_R < \mu_1 \|d\|_R, \quad \|z_{xy}|_R < \mu_1 \|d\|_R, \quad \|z_{yy}|_R < \mu_1 \|d\|_R. \end{cases}$$

Dabei hängt μ_1 *nur von* M *ab.*

Der Beweis folgt aus Satz 1 mit sukzessiven Approximationen und dem alternierenden Verfahren. Zunächst werde $R \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{1}{6M\lambda}; 1\right)$ angenommen, λ wie in Satz 2. Man definiere nun sukzessiv $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ durch

$$\begin{aligned} \Delta z_0 &= d, \\ \Delta z_1 &= -a\frac{\partial z_0}{\partial x} - b\frac{\partial z_0}{\partial y} - cz_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta z_n &= -a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} - cz_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

mit $z_n = 0$ für $x^2 + y^2 = R^2$ und wende vollständige Induktion an:

1. Aus Satz 2 folgt

$$\|z_0|_R < \lambda R \|d\|_R, \quad \left\|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|_R < \lambda R \|d\|_R, \quad \left\|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|_R < \lambda R \|d\|_R.$$

2. Angenommen, es gelte schon

$$\|z_{n-1}|_R < (3M\lambda R)^{n-1} \lambda R |d|_R$$

und das gleiche für $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$, dann folgt zunächst nach (2)

$$\left| -a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} - cz_{n-1}\right|_R < (3M\lambda R)^n \|d\|_R$$

und wieder mit Satz 1

$$\|z_n|_R < (3M\lambda R)^n \lambda R \|d|_R$$

und dasselbe für $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. Nun setze man $z = \sum_0^\infty z_n$, dann gilt

$$z_{|R} \leq \sum_0^\infty |z_n|_R < \lambda R \; d_{|R} \sum_0^\infty (3M\lambda R)^n \leq 2\lambda R \, |d_{|R}$$

wegen $R \leqq \frac{1}{6M\lambda}$, und dasselbe für z_x und z_y.

Ebenso folgt mit Satz 1, daß die Reihen der gewöhnlichen Moduln

$$\sum \left|\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right|_{\varepsilon R}, \quad \sum \left|\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}\right|_{\varepsilon R}, \quad \sum \left|\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right|_{\varepsilon R}$$

für $\varepsilon \leqq \varrho \leqq R$ konvergieren. Dies gilt für jedes ε mit $0 < \varepsilon \leqq R$, sowohl in bezug auf x, y als auch auf x', y' als Variable; also konvergieren diese Reihen überall gleichmäßig für $x^2 + y^2 \leqq R^2$. Daher stellt $z(x, y)$ in diesem Bereich eine Lösung von $L(z) - d$ mit Randwerten 0 dar. Aus $\Delta z = d - a z_x - b z_y - c z$ folgt nun mit den obigen Abschätzungen für $\|z_x|$, $\|z_y|$, $\|z|$ und Satz 2:

$$|z_{xx}|_R < \mu \|d|_R \quad \text{(für } z_{xy},\ z_{yy} \text{ dasselbe).}$$

Damit ist Satz 4 für einen hinreichend kleinen Kreis bewiesen. Für einen hinreichend schmalen Kreisring schließt man analog. Sei $R_1 < R_2 \leqq 1$, $R_2 - R_1 \leqq \frac{1}{6Ml_2}$, ferner $z(x, y)$ Lösung von $L(z) = d$ im Kreisringe $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$, dann folgt wie eben aus Satz 3:

$$(17)\quad \begin{cases} |z_{R_1 R_2} < \mu_1'(R_2 - R_1)\,|d|_{R_1 R_2}, \\ |z_x|_{R_1 R_2} < \mu_1'(R_2 - R_1)\,|d|_{R_1 R_2}, \quad |z_y|_{R_1 R_2} < \mu_1'(R_2 - R_1)\,|d|_{R_1 R_2}, \\ |z_{xx}|_{R_1 R_2} < \frac{\mu_1'}{R_1^2}\,|d_{|R_1 R_2}, \quad |z_{xy}|_{R_1 R_2} < \frac{\mu_1'}{R_1^2}\,|d|_{R_1 R_2}, \quad |z_{yy}|_{R_1 R_2} < \frac{\mu_1'}{R_1^2}\,|d|_{R_1 R_2}. \end{cases}$$

Bevor der Beweis für Satz 4 vollendet werden kann, braucht man einige Hilfssätze für das alternierende Verfahren.

Satz 5a. *Sei $v(x, y)$ für $x^2 + y^2 < R^2$ Lösung von $L(v) = 0$ und $|v(R)| < N$. $v(R)$ habe stetige zweite Ableitungen; ferner sei $R = \frac{1}{6Ml_1}$, wo l_1 die Zahl aus Satz 1, M die Zahl aus Satz 4 ist und noch $M \geqq \frac{1}{6l_1}$ gewählt wird, damit $R \leqq 1$ ist. Dann gibt es ein λ_0 derart, daß*

$$(18)\quad |v|_{0\varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}, \quad |v_x|_{0\varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}, \quad |v_y|_{0\varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}.$$

Satz 5b. *Sei* $L(v) = 0$ *für* $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ *und* $v(R_1) = 0$, $|v(R_2)| < N$. $v(R_2)$ *habe stetige zweite Ableitungen, und es sei* $R_2 - R_1 = \frac{1}{6 M l_2}$, *wo* l_2 *die Zahl aus Satz 3 ist. Dann gibt es ein* λ_0 *derart, daß*

$$|v|_{R_1 \varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2}, \quad |v_x|_{R_1 \varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2}, \quad |v_y|_{R_1 \varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2}.$$

Der Satz 5b läßt sich auch aussprechen, indem man R_1 und R_2 vertauscht:

Satz 5c. *Sei* $L(v) = 0$ *für* $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ *und* $|v(R_1)| < N$, $v(R_2) = 0$, *dann ist*

$$|v|_{\varrho R_2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_1}\right)^2}, \quad |v_x|_{\varrho R_2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_1}\right)^2}, \quad |v_y|_{\varrho R_2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_1}\right)^2}.$$

Der Beweis der Hilfssätze erfolgt in mehreren Schritten.

Bemerkung 1 zu Satz 5a. *Sei* α *eine Zahl mit* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. *Ferner sei* $\Delta v = 0$ *für* $x^2 + y^2 < R^2$, $|v(R)| < N$ *und*

$$v = \sum_0^\infty C_n(\varrho) \cos n\vartheta + D_n(\varrho) \sin n\vartheta.$$

Dann gibt es Zahlen c_n, d_n *und eine nur von* α *abhängende Zahl* λ_1 *mit* $\sum c_n + d_n < \lambda_1 N$ *derart, daß*

$$(19a) \qquad |C_n| < \frac{c_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha}, \quad |D_n| < \frac{d_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha}$$

ist. Ist ferner $v_x = \sum_0^\infty C_n'(\varrho) \cos n\vartheta + D_n'(\varrho) \sin n\vartheta$, *so wird*

$$(19b) \qquad |C_n'| < \frac{c_n}{R\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}, \quad |D_n'| < \frac{d_n}{R\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}.$$

Für v_y *gilt das Entsprechende.*

Beweis: Man setze

$$c_n^* = \max_{0 \le \varrho \le R} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha |C_n(\varrho)|, \quad d_n^* = \max_{0 \le \varrho \le R} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha |D_n(\varrho)|,$$

dann folgt sofort

$$|C_n| < \frac{c_n^*}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha}, \quad |D_n| < \frac{d_n^*}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha},$$

und für die Ungleichung (19a) braucht man nur noch $\sum_0^\infty c_n^* + d_n^* < \lambda_1 N$ zu zeigen. Aus $\Delta v = 0$ folgt bekanntlich

$$C_n(\varrho) = C_{n0}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n, \quad D_n(\varrho) = D_{n0}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n, \quad \sum C_{n0}^2 + D_{n0}^2 \le 2N^2.$$

Nun ist

$$\sum c_n^* = \sum \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho \leqq R} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha |C_{n0}| \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n$$

$$\leqq \sqrt{\sum C_{n0}^2} \sqrt{\sum \left[\operatorname{Max} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\right]^2}.$$

Die Ableitung von $(1-x)^\alpha x^n$ nach x ist $-\alpha(1-x)^{\alpha-1} x^n + n x^{n-1}(1-x)^\alpha$, sie verschwindet im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ bei $x = \frac{n}{n+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n+\alpha}$ für $n \geqq 2$. Folglich ist

$$\operatorname{Max}(1-x)^\alpha x^n = \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^n < \frac{1}{n^\alpha}, \text{ also } \left[\operatorname{Max} \left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^\alpha \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\right]^2 < \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Für $n = 1$ gilt dies offenbar auch. Wegen $\alpha > \frac{1}{2}$ ist $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ eine feste Zahl $z(\alpha)$. Also hat man

$$\sum_1^\infty c_n^* + d_n^* < \sqrt{\left(\sum C_{n0}^2 + D_{n0}^2\right)} \sum \frac{2}{n^{2\alpha}} \leqq 2N \sqrt{z(\alpha)}.$$

Für $n = 0$ folgt noch $|C_{00}(\varrho)| = \left|\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\varrho, \vartheta)\, d\vartheta\right| < 2N$.

Nun zur Beziehung (19b). Man setze (für $n \geqq 1$)

$$c_n^{**} = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varrho \leqq R} \left[\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha} \frac{n |C_{n0}|}{R} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\right].$$

Es ist

$$v_\varrho = \frac{1}{R} \sum_1^\infty n C_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \cos n\vartheta + n D_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \sin n\vartheta,$$

$$\frac{v_\vartheta}{\varrho} = \frac{1}{R} \sum_1^\infty -n C_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \sin n\vartheta + n D_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \cos n\vartheta,$$

$$v_x = v_\varrho \cos\vartheta + \frac{v_\vartheta}{\varrho} \sin\vartheta = \frac{1}{R} \sum_0^\infty n C_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \cos(n+1)\vartheta$$

$$+ \frac{1}{R} \sum_0^\infty n D_{n0} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \sin(n-1)\vartheta,$$

also $\quad |C'_{n+1}| \leqq \frac{n}{R} |C_{n0}| \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}$ für $n \geqq 0$, $\quad C'_0 = 0$,

$$|D'_{n-1}| \leqq \frac{n}{R} |D_{n0}| \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \text{ für } n \geqq 2, \quad D'_0 = 0.$$

Daher folgt

$$|C'_{n+1}| < \frac{c_n^{**}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} \quad (n+1 \geq 1), \qquad |D'_{n-1}| < \frac{d_n^{**}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} \quad (n-1 \geq 1).$$

Also genügt es weiter, $\sum_1^\infty c_n^{**} + d_n^{**} < \lambda_1 \frac{N}{R}$ nachzuweisen; wieder ist

$$\sum_1^\infty c_n^{**} + d_n^{**} = \sum_1^\infty \operatorname{Max}\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha} \frac{n|C_{n0}| + n|D_{n0}|}{R} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}$$

$$\leqq \sqrt{\sum_1^\infty \frac{C_{n0}^2 + D_{n0}^2}{R^2}} \sum_1^\infty \operatorname{Max}\left[\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha} n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\right].$$

Ähnlich wie oben findet man $\operatorname{Max}\left[\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha} n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\right] < \frac{4}{n^\alpha}$ für $n \geqq 1$, also

$$\sum c_n^{**} + d_n^{**} < \sqrt{\frac{2N^2}{R^2} \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot z(\alpha)} < \frac{8N}{R} \sqrt{z(\alpha)}.$$

Wählt man nun c_n als die größere der beiden Zahlen c_n^* und c_n^{**}, so ist die Bemerkung 1 bewiesen.

Bemerkung 2 zu Satz 5a. *Sei*

$$f(x, y) = \sum A_n(\varrho) \cos n\vartheta + B_n(\varrho) \sin n\vartheta$$

und $|A_n| < \frac{a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}$, $|B_n| < \frac{b_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}$ *mit* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Sei weiter $v(x, y) = \sum C_n(\varrho) \cos n\vartheta + D_n(\varrho) \sin n\vartheta$ *und* $\Delta v = f(x, y)$ *für* $x^2 + y^2 < R^2$, $v(R) = 0$. *Dann gilt*

(20a) $$|C_n| < \frac{\lambda_2 R^2 a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}, \quad |D_n| < \frac{\lambda_2 R^2 a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}};$$

bildet man noch $v_x = \sum C_n'(\varrho) \cos n\vartheta + D_n'(\varrho) \sin n\vartheta$, *so gilt weiter*

(20b) $$|C_n'| < \frac{\lambda_2 R a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}, \quad |D_n'| < \frac{\lambda_2 R a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}.$$

Beweis[6]: Die beiden Formeln (20) folgen sofort aus

(21) $$n|C_n| < \frac{\lambda_2^* R^2 a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}, \quad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{\lambda_2^* R a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}.$$

Um (21) zu beweisen, bilde man nach (5)

$$2nC_n = \left(\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}} - 1\right) \cdot \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right) d\varrho$$

6) Vgl. Bernstein a. a. O.[3]) S. 358 ff.

und schätze ab:

$$2n|C_n| < \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)\frac{a_n}{\varrho^n}\left|\int_0^{\varrho} \frac{\varrho^{n+1}}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} d\varrho\right| + a_n\varrho^n\left|\int_{\varrho}^{R} \frac{1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} d\varrho\right|$$

$$= \left(1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)\frac{a_n}{\varrho^n} J_1 + a_n\varrho^n J_2.$$

Nun ist $$J_1 < \frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}\int_0^{\varrho} \varrho^{n+1}\, d\varrho = \frac{\varrho^{n+2}}{(n+2)\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}},$$

$$J_2 = \int_{\varrho}^{R} \frac{1+\frac{\varrho}{R}+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}} d\varrho.$$

Durch partielle Integration folgt

$$J_2 = \left[\frac{1+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}}{\varrho^{n-1}} \frac{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} R\right]_R^{\varrho}$$

$$+ \int_R^{\varrho} \frac{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha} R \frac{d}{d\varrho}\frac{\left(1+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}\right)}{\varrho^{n-1}} d\varrho.$$

Darin ist der erste Ausdruck gleich

$$\frac{1}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}\frac{R}{1-\alpha} < \frac{1}{\varrho^{n-1}}\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}\frac{R}{1-\alpha}$$

und der zweite Ausdruck

$$< \frac{R}{1-\alpha}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha}\int_{\varrho}^{R} \frac{d}{d\varrho}\frac{\left(1+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}\right)}{\varrho^{n-1}} d\varrho < \frac{2n}{R^{n-1}}\frac{R}{1-\alpha}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha},$$

also $$J_2 < \frac{2n}{R^{n-1}}\frac{R}{1-\alpha}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} + R\frac{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{1+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}}{\varrho^{n-1}}$$

$$< \frac{2n}{R^{n-1}}\frac{R}{1-\alpha}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} + \frac{R}{1-\alpha}\frac{1}{\varrho^{n-1}}\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}},$$

also

$$2n|C_n| < \frac{a_n\varrho^2}{n+2}\frac{1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} + \frac{2n a_n R}{1-\alpha}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} + \frac{a_n\varrho R}{1-\alpha}\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}.$$

Die erste Formel (21) folgt hieraus auf Grund der Abschätzungen:

$$\frac{1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}}{(n+2)\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} = \frac{1+\frac{\varrho}{R}+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}}{(n+2)\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}} < \frac{2}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}},$$

$$n\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} < \left(1+\frac{\varrho}{R}+\cdots\right)\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} < \frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}.$$

Nun zur anderen Formel (21). Man zieht wieder (5) heran:

$$2\frac{dC_n}{d\varrho} = \left(1+\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)\frac{1}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\varrho} A_n\varrho^{n+1}d\varrho + \varrho^{n-1}\int_{\varrho}^{R}\frac{A^n}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)d\varrho,$$

$$2\left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{2a_n}{\varrho^{n+1}}\left|\int_0^{\varrho}\frac{\varrho^{n+1}}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}d\varrho\right| + a_n\varrho^{n-1}\left|\int_{\varrho}^{R}\frac{1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}d\varrho\right|$$

$$= \frac{2a_n}{\varrho^{n+1}}J_1 + a_n\varrho^{n-1}J_2.$$

Nach den früheren Abschätzungen für J_1 und J_2 ergibt sich

$$2\left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{2\varrho a_n}{n+2}\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} + \frac{2na_nR}{1-\alpha}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1-\alpha} + \frac{a_nR}{1-\alpha}\frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}}.$$

Das erste Glied ist abgeschätzt wie gewünscht, für das zweite und dritte ergibt sich wie oben als Schranke

$$\frac{\lambda' R a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha}} < \frac{\lambda' R a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}.$$

Damit ist auch Bemerkung 2 bewiesen.

Der Beweis von Satz 5a ergibt sich aus den beiden Bemerkungen mit sukzessiven Approximationen. Man definiere wieder $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ durch Differentialgleichungen $\Delta v_0 = 0$ mit Randwerten $v_0(R) = v(R)$ und sonst $\Delta v_n = d_n$, wobei

$$d_n = -a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} - cv_{n-1}$$

ist, mit Randwerten 0. Setzt man nun

$$v_n = \sum_{\nu} C_{n\nu}\cos\nu\vartheta + D_{n\nu}\sin\nu\vartheta,$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \sum_{\nu} C'_{n\nu}\cos\nu\vartheta + D'_{n\nu}\sin\nu\vartheta, \qquad \frac{\partial v_n}{\partial y} = \sum_{\nu} C''_{n\nu}\cos\nu\vartheta + D''_{n\nu}\sin\nu\vartheta,$$

so folgt mit dem l_1 von Satz 1

$$(22) \qquad |C_{n\nu}| < \frac{6 M l_1 N c_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}, \quad |D_{n\nu}| < \frac{6 M l_1 N d_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}$$

mit $\sum c_{n\nu} + d_{n\nu} < \lambda_1 \frac{1}{2^n}$ und dasselbe für $C'_{n\nu}$, $D'_{n\nu}$, $C''_{n\nu}$, $D''_{n\nu}$. Dies beweist man durch vollständige Induktion: Für v_0 gilt (19), worin man nur noch R durch $\frac{1}{6 M l_1}$ zu ersetzen braucht, um (22) zu erhalten. Sei nun weiter (22) richtig für $n-1$, dann folgt, daß die ν-ten FOURIER-Koeffizienten von $a \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}$ kleiner sind als

$$\frac{6 M l_1 N c'_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{6 M l_1 N d'_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}$$

$$\text{mit } \sum_\nu c'_{n\nu} + d'_{n\nu} \leqq M \sum_\nu c_{n-1,\nu} + d_{n-1,\nu} \leqq \frac{M}{2^{n-1}}.$$

Daraus folgt, daß die ν-ten FOURIER-Koeffizienten von d_n kleiner sind als

$$3 \frac{6 M l_1 N c'_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad 3 \frac{6 M l_1 N d'_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}},$$

und daraus nach (6)

$$|C_{n\nu}| < \frac{3 l_1 R \cdot 6 M l_1 N c'_{n\nu}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}.$$

Man setze nun $c_{n\nu} = 3 l_1 R c'_{n\nu}$, dann folgt (22) mit

$$\sum_\nu c_{n\nu} + d_{n\nu} = 3 l_1 R \sum_\nu c'_{n\nu} + d'_{n\nu} = 3 l_1 R M \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

wegen $R = \frac{1}{6 M l_1}$. Dasselbe schließt man für $C'_{n\nu}$, $D'_{n\nu}$, $C''_{n\nu}$, $D''_{n\nu}$.

Aus (22) folgt jetzt direkt

$$|v_n|_{0\varrho} = 6 M l_1 N \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}} \frac{1}{2^n}$$

und das gleiche für $\frac{\partial v_n}{\partial x}$, $\frac{\partial v_n}{\partial y}$. Man setze wieder $v = \sum_0^\infty v_n$. Daß v die Gleichung $L(v) = 0$ mit den vorgeschriebenen Randwerten erfüllt, war schon gezeigt (sukzessive Approximationen zu Satz 4). Dann folgt aus den obigen Beziehungen für die v_n

$$|v|_{0\varrho} < 6 M l_1 N \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1+\alpha}}$$

und ebenso für v_x und v_y, also (18).

Der Beweis von 5b verläuft ganz analog. Man beweist zunächst

Bemerkung 1 zu Satz 5b. *Es sei* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\Delta v = 0$ *für* $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$, $v(R_1) = 0$, $|v(R_2)| < N$. *Ist* $v = \sum C_n(\varrho) \cos n\vartheta + D_n(\varrho) \sin n\vartheta$, *so gilt*

$$(23a) \qquad |C_n| < \frac{c_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}}, \quad |D_n| < \frac{d_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}};$$

ist weiter $v_x = \sum C_n'(\varrho) \cos n\vartheta + D_n'(\varrho) \sin n\vartheta$, *so gilt*

$$(23b) \qquad |C_n'| < \frac{c_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}, \quad |D_n'| < \frac{d_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}},$$

und dabei ist $\sum c_n + d_n < \lambda_3 N$ *mit einem von nichts abhängigem* λ_3. *Für* v_y *gilt dasselbe.*

Beweis: 1. Man setze $c_n^* = \underset{R_1 \leqq \varrho \leqq R_2}{\operatorname{Max}} \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha} |C_n(\varrho)|$, d_n^* entsprechend; dann ist wieder nur noch $\sum c_n^* + d_n^* < \lambda_3 N$ zu zeigen. Bekanntlich ist $C_n(\varrho) = c_{n1}\varrho^n + c_{n2}\varrho^{-n}$ für $n \geqq 1$ und $C_0(\varrho) = \frac{1}{2} c_{01} + c_{02} \log \varrho$. Aus $v(R_1) = 0$ folgt $C_n(R_1) = 0$, also für $n \geqq 1$

$$c_{n2} = c_{n1} R_1^{2n}, \quad c_{n1}\varrho^n + c_{n2}\varrho^{-n} = c_{n1}\varrho^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right).$$

Ferner ist $\sum C_n(R_2)^2 + D_n(R_2)^2 < 2N^2$, also

$$\sum \left[c_{n1} R_2^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\right]^2 + \left[d_{n1} R_2^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\right]^2 < 2N^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} c_n^* &= \underset{R_1 \leqq \varrho \leqq R_2}{\operatorname{Max}} \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha} |c_{n1}\varrho^n + c_{n2}\varrho^{-n}| \\ &= |C_{n1}| R_2^{2n} \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right) \operatorname{Max} \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha} \frac{\varrho^n}{R_2^n} \frac{1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}}{1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}}, \\ &< |c_{n1}| R_2^{2n} \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right) \operatorname{Max} \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha} \frac{\varrho^n}{R_2^n}. \end{aligned}$$

Da nun $\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha} \left(\frac{\varrho}{R_2}\right)^n < \frac{1}{n^{\alpha}}$ ist (vgl. Beweis von Bemerkung 1 zu 5a), so folgt

$$c_n^* < |c_{n1}| R_2^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right) \frac{1}{n^{\alpha}},$$

$$\begin{aligned} \sum c_n^* + d_n^* &< \sqrt{\left(\sum \left[c_{n1} R_2^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\right]^2 + \left[d_{n1} R_2^n \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\right]^2\right) \sum \frac{2}{n^{2\alpha}}} \\ &< \sqrt{2N^2 \cdot 2z(\alpha)} < 2N\sqrt{z(\alpha)}. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist

$$\operatorname{Max} \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha} |c_{01} + c_{02} \log \varrho| < \operatorname{Max} |c_{01} + c_{02} \log \varrho| < 2N.$$

2. Es sind noch v_ϱ und $\frac{v_\vartheta}{\varrho}$ zu betrachten. Es ist

$$v_\varrho = \frac{c_{02}}{2}\frac{1}{\varrho} + \sum_1^\infty (n c_{n1}\varrho^{n-1} - n c_{n2}\varrho^{-n-1})\cos n\vartheta + \sum_1^\infty (n d_{n1}\varrho^{n-1} - n d_{n2}\varrho^{-n-1})\sin n\vartheta$$

$$= \frac{c_{02}}{2}\frac{1}{\varrho} + \sum_1^\infty n c_{n1}\varrho^{n-1}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right)\cos n\vartheta + \sum_1^\infty n d_{n1}\varrho^{n-1}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R^{2n}}\right)\sin n\vartheta.$$

Man setze wieder (vgl. auch Beweis der Bemerkung 1 zu 5a)

$$c_n^{**} = \operatorname*{Max}_{R_1 \leqq \varrho \leqq R_2}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}\left(n|c_{n1}|\varrho^{n-1}\left(1 + \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right)\right)$$

$$= |c_{n1}| R_2^{2n}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\operatorname{Max}\left[\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha} n\frac{\varrho^{n-1}}{R_2^n}\frac{1 + \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}}{1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}}\right].$$

Nun genügt es wieder, $\sum c_n^{**} + d_n^{**} < \lambda N$ nachzuweisen. Es ist

$$\frac{1}{R_2}\frac{1 + \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}}{1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}} < \frac{2}{R_2 - R_1}, \quad \left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha} n\left(\frac{\varrho}{R_2}\right)^{n-1} < \frac{4}{n^\alpha};$$

$$\sum c_n^{**} + d_n^{**} \leqq \sqrt{2N^2\left(\frac{2}{R_2 - R_1}\right)^2 \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot z(\alpha)} = \frac{16N}{R_2 - R_1}\sqrt{z(\alpha)}.$$

Für $n = 0$ hat man noch $\frac{|c_{01}|}{2}\frac{1}{\varrho} < \frac{N}{R_1}$.

3. Schließlich ist

$$\frac{v_\vartheta}{\varrho} = \sum_1^\infty (-n c_{n1}\varrho^{n-1} - n c_{n2}\varrho^{-n-1})\sin n\vartheta + \sum_1^\infty (n d_{n1}\varrho^{n-1} + n d_{n2}\varrho^{-n-1})\cos n\vartheta$$

$$= \sum -n c_{n1}\varrho^{n-1}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right)\sin n\vartheta + \sum n d_{n1}\varrho^{n-1}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right)\cos n\vartheta.$$

Hier wird

$$c_n^{**} = \frac{|c_{n1}|}{R_2} R_2^n\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\operatorname{Max}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha} n\frac{\varrho^{n-1}}{R_2^{n-1}}\frac{1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}}{1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}}$$

$$< \frac{|c_{n1}|}{R_2} R_2^n\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\operatorname{Max}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha} n\frac{\varrho^{n-1}}{R_2^{n-1}},$$

$$\sum c_n^{**} + d_n^{**} < \sqrt{\frac{2N^2}{R_2^2} \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot z(\alpha)} = \frac{8N}{R_2}\sqrt{z(\alpha)}.$$

Bemerkung 2 zu Satz 5b. *Sei* $f(x, y) = \sum A_n(\varrho)\cos n\vartheta + B_n(\varrho)\sin n\vartheta$ *mit*

$$|A_n| < \frac{a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}, \qquad |B_n| < \frac{b_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}.$$

Sei weiter $v(x, y) = \sum C_n(\varrho)\cos n\vartheta + D_n(\varrho)\sin n\vartheta$, $\Delta v = f(x, y)$ *für* $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$, $v(R_1) = v(R_2) = 0$, *dann folgt*

$$(24a) \qquad |C_n| < \frac{\lambda_4 a_n (R_2 - R_1)}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}}, \qquad |D_n| < \frac{\lambda_4 b_n (R_2 - R_1)}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}};$$

ist noch $v_x = \sum C_n' \cos n\vartheta + D_n' \sin n\vartheta$, *so gilt*

$$(24b) \qquad |C_n'| < \frac{\lambda_4 a_n (R_2 - R_1)}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}, \qquad |D_n'| < \frac{\lambda_4 b_n (R_2 - R_1)}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}};$$

dasselbe gilt für v_y.

Beweis: Man zieht die BERNSTEINschen Formeln (13) heran.

$$2(R_2^{2n} - R_1^{2n}) C_n = \frac{1}{n}\left(\varrho^{n+1} - \frac{R_2^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right)\int_{R_1}^{\varrho} A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right) d\varrho$$

$$+ \frac{1}{n}\left(\varrho^{n+1} - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right)\int_{\varrho}^{R_2} A_n\left(\frac{R_2^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right) d\varrho = (R_2^{2n} - R_1^{2n})\ (I + II)$$

$$|I| \leqq \frac{R_2^{2n} - \varrho^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \frac{a_n}{n\varrho^{n-1}} \int_{R_1}^{\varrho} \frac{\varrho^n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right) d\varrho$$

$$< \frac{R_2^{2n} - \varrho^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \frac{\varrho^{2n} - R_1^{2n}}{\varrho^n} \frac{a_n}{n\varrho^{n-1}} \int_{R_1}^{\varrho} \frac{\varrho^n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}} d\varrho.$$

Es ist $\frac{\varrho^{2n} - R_1^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} < \frac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}$, also $\frac{R_2^{2n} - \varrho^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} \frac{\varrho^{2n} - R_1^{2n}}{\varrho^{2n}} < 1 - \frac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}$, also

$$(24c) \qquad |I| \leqq \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}\right)\frac{a_n}{n}\int_{R_1}^{\varrho} \frac{\varrho^n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}} d\varrho \leqq (\varrho - R_1)\frac{a_n\left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}\right)}{n\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}$$

$$\leqq (\varrho - R_1)\frac{2a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}} \leqq \frac{2a_n(R_2 - R_1)}{\left(1-\frac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}}.$$

Mit der Abschätzung für J_2 (S. 251) wird

$$(24\,\mathrm{d}) \quad |II| \leqq \frac{a_n \varrho^{n+1} R_2^{2n}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\left(1 - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}\right)\int_{\varrho}^{R_2} \frac{1 - \dfrac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}}{\varrho^n\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}\, d\varrho$$

$$< \frac{\varrho}{\varrho^{2n}} \frac{R_2^{2n}(\varrho^{2n} - R^{2n}}{R_2^{n-1}(R_2^{2n} - R_1^{2n})} \frac{2\,a_n R_2}{1-\alpha}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1-\alpha}$$

$$+ \frac{1 - \dfrac{R_1^{2n}}{\varrho^{2n}}}{n} \frac{a_n R_2}{1-\alpha}\,\varrho\, R_2^{2n}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1-\alpha} \frac{1 + \cdots + \dfrac{\varrho^{2n-1}}{R_2^{2n-1}}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} = II_a + II_b.$$

Man schätzt jedes Glied einzeln wie gewünscht ab. Es ist

$$R_2^{2n}(\varrho^{2n} - R_1^{2n}) < \varrho^{2n}(R_2^{2n} - R_1^{2n}), \quad \frac{\varrho^n R_2^{2n}}{\varrho^{2n} R_2^{n-1}} \frac{\varrho^{2n} - R_1^{2n}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} < R_2,$$

$$II_a < \frac{4\,a_n R_2}{1-\alpha}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1-\alpha} < \frac{4\,a_n}{1-\alpha} \frac{R_2 - R_1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}};$$

$$II_b < \frac{\left(1 + \dfrac{R_1}{\varrho} + \cdots + \dfrac{R_1^{2n-1}}{\varrho^{2n-1}}\right)\left(1 - \dfrac{R_1}{\varrho}\right)}{n} \frac{a_n R_2 \varrho}{1-\alpha} \frac{R_2^{2n}\left(1 - \dfrac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}\right)}{(R_2^{2n} - R_1^{2n})\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_1}\right)^{\alpha}}$$

$$< 2\left(1 - \frac{R_1}{\varrho}\right) \frac{a_n R_2 \varrho}{1-\alpha} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}} < \frac{2\,a_n R_2}{1-\alpha} \frac{R_2 - R_1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}}.$$

Die Formel (24b) folgt sofort aus folgenden Ungleichungen:

$$(25) \qquad n\,|C_n| < \frac{\lambda_4 a_n (R_2 - R_1)}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}, \quad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{\lambda_4 a_n (R_2 - R_1)}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}.$$

Für die erste dieser Formeln zieht man wieder die eben benutzte Zerlegung $2C_n = I + II$ heran. Es genügt dann, (25) für $n \cdot I$ und $n \cdot II$ einzeln zu beweisen. Aus (24c) folgt

$$n\,|I| \leqq \frac{a_n (R_2 - R_1)}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}.$$

Für $n \cdot II$ erhält man aus (24d)

$$n\,|II| \leqq n \cdot II_a + n \cdot II_b.$$

Man schätzt wieder einzeln ab. Es ist

$$\frac{\varrho^n R_2^{2n}(\varrho^{2n} - R_1^{2n})}{\varrho^{2n} R_2^{n-1}(R_2^{2n} - R_1^{2n})} < R_2 \frac{\varrho^n}{R_2^n}, \quad n\,\frac{\varrho^n}{R_2^n} < \frac{1}{1 - \dfrac{\varrho}{R_2}},$$

$$n \cdot II_a < \frac{2\,a_n R_2}{1-\alpha} \frac{R_2 - \varrho}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}},$$

$$n \cdot II_b < \frac{a_n R_2 \varrho}{1-\alpha} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}} < \frac{a_n R_2}{1-\alpha} \frac{R_2 - R_1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}.$$

Für die zweite Formel (25) dividiere man (13) durch $n(R_2^{2n} - R_1^{2n})$. Dann folgt

$$2\frac{dC_n}{d\varrho} = \frac{\varrho^{2n}\dfrac{n+1}{n} + R_2^{2n}\dfrac{n-1}{n}}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\int_{R_1}^{\varrho} A_n\left(\frac{R_1^n}{\varrho^n} - \varrho_n\right)d\varrho + \frac{\varrho^{2n}\dfrac{n+1}{n} + R_1^{2n}\dfrac{n-1}{n}}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\int_{\varrho}^{R_2} A_n\left(\frac{R_2^{2n}}{\varrho^n} - \varrho_n\right)d\varrho,$$

$$2\left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right| < \frac{\varrho^{2n} + R_2^{2n}}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\left|\int_{R_1}^{\varrho} A_n\left(\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right)d\varrho\right| + \frac{2(\varrho^{2n} - R_1^{2n})}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\left|\int_{\varrho}^{R_2} A_n\left(\frac{R_2^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right)d\varrho\right| = |I'| + |II'|.$$

$$|I'| < \frac{2R_2^{2n}}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\int_{R_1}^{\varrho}\frac{a_n}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}\frac{\varrho^{2n} - R_1^{2n}}{\varrho^n}d\varrho < \frac{2R_2^{2n}(\varrho^{2n} - R_1^{2n})}{\varrho^{2n}(R_2^{2n} - R_1^{2n})}\frac{a_n(\varrho - R_1)}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}} < \frac{2a_n(\varrho - R_1)}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}.$$

Ferner ist $|II'| \leqq \dfrac{2(\varrho^{2n} + R_1^{2n})R_2^{2n}}{\varrho^n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}a_n\int_{\varrho}^{R_2}\frac{1 - \dfrac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}}{\varrho^{n-1}\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}}d\varrho.$

Das Integral (früher J_2) war schon abgeschätzt, danach ist

$$|II'| < \frac{8n\varrho^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}\frac{a_n R_2^{n+2}}{1-\alpha}\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^{1-\alpha} + \frac{4a_n\varrho R_2}{(1-\alpha)\left(1 - \dfrac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}\right)}\frac{1 - \dfrac{\varrho^{2n}}{R_2^{2n}}}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}} < \frac{12a_n R_2^2}{1-\alpha}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{\alpha}} < \frac{12a_n R_2}{1-\alpha}\frac{R_2 - R_1}{\left(1 - \dfrac{\varrho}{R_2}\right)^{1+\alpha}},$$

da $$\frac{n\varrho^n R_2^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}} < \frac{1}{1 - \dfrac{\varrho}{R_2}}.$$

Die Sätze 5b und 5c beweist man jetzt aus den Bemerkungen 1 und 2 mit sukzessiven Approximationen genau wie beim entsprechenden Beweis von Satz 5a. Für Satz 5c erhält man die beiden Bemerkungen aus denen für Satz 5b durch Transformation der Polarkoordinaten $\varrho' = \dfrac{R_1^2}{\varrho}$, $\vartheta' = \vartheta$.

Aus den Sätzen 5a bis 5c folgt nun

Satz 5d. *Sei $v(x, y)$ Lösung von $L(v) = 0$ für $x^2 + y^2 < R^2$, $v(R)$ habe stetige zweite Ableitungen und es sei $|v(R)| < N$. Dann gilt*

$$|v|_{0\varrho} < \frac{\mu_2 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}, \quad |v_x|_{0\varrho} < \frac{\mu_2 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}, \quad |v_y|_{0\varrho} < \frac{\mu_2 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2},$$

worin μ_2 nur von R und einer Schranke M für $|a|_{0R}$, $|b|_{0R}$, $|c|_{0R}$ abhängt.[7])

Beweis: Sei Satz 5d schon richtig für ein gewisses R, dann gilt er auch noch für $R_2 = R + \frac{1}{12 M l_2}$, wenn l_2 die Zahl aus Satz 3 ist. Man setze noch $R_1 = R - \frac{1}{12 M l_2} = R_2 - \frac{1}{6 M l_2}$. Endlich wähle man noch $R_0 = \frac{R + R_1}{2}$. Für alle $\varrho \leqq R_0$ betrachte man v als Lösung von $L(v) = 0$ im Kreise $x^2 + y^2 < R^2$. In der Voraussetzung zu Satz 4 war $c \leqq 0$ verlangt, daraus folgt, daß eine Lösung v von $L(v) = 0$ im Innern eines Gebietes kein Maximum des Betrages annehmen kann. Also ist die Lösung der Randwertaufgabe $L(v) = 0$ sowohl im Kreis wie auch im Kreisring eindeutig. Weiter folgt $|v(R)| < N$ und mit Satz 5a:

$$|v|_{0\varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{R_0}{R}\right)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2}.$$

Für alle $\varrho > R_0$ schließe man so: Man setze $v = v_1 + v_2$ für $\varrho > R_1$, wobei v_1 und v_2 erklärt seien durch

$$L(v_1) = L(v_2) = 0 \quad \text{für} \quad R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2,$$
$$v_1(R_1) = 0, \quad v_1(R_2) = v(R_2); \quad v_2(R_1) = v(R_1), \quad v_2(R_2) = 0,$$

so daß also $|v_1(R_1)| < N$, $|v_2(R_2)| < N$ ist. Für v_1 ist nach Satz 5b

$$|v_1|_{R_1\varrho} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2}, \quad |v_1|_{0\varrho} \leqq |v_1|_{0R_1} + |v_1|_{R_1\varrho},$$

worin rechts beide Glieder wie gewünscht abgeschätzt sind. Für v_2 wendet man Satz 5c an:

$$|v_2|_{R_0\varrho} < |v_2|_{R_0R_1} \leqq \frac{\lambda_0 N}{\left(\frac{R_0}{R_1} - 1\right)^2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(\frac{R_0}{R_1} - 1\right)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2} = \frac{\mu_2 N}{\left(1 - \frac{\varrho}{R_2}\right)^2};$$

$|v_2|_{0R_0}$ war schon abgeschätzt. v_x und v_y behandelt man genau so.

Der Satz 4 war schon bewiesen für einen hinreichend kleinen Kreis und einen hinreichend schmalen Kreisring. Er folgt daraus in voller

7) Der Satz besagt also, daß Satz 5a auch für beliebig große R richtig ist.

Allgemeinheit mit dem alternierenden Verfahren und dem Satz 5d. Beim alternierenden Verfahren ist es noch üblich, folgende Hilfsbemerkung heranzuziehen: Ist $L(v) = 0$ in einem Kreisringe und ist $|v| = 0$ auf *einem* Rande und auf dem *andern* $|v| \leqq N$, so ist auf jeder ganz im Innern verlaufenden Kreisperipherie $|v| \leqq qN$, worin $0 < q < 1$ ist und q nicht von N, sondern nur von a, b, c abhängt. Dies ist eine leichte Folge der Tatsache, daß $|v|$ kein Maximum im Innern annimmt, und dies folgt bekanntlich aus $c \leqq 0$.

Der Beweis von Satz 4 wird nun mit dem alternierenden Verfahren zu Ende geführt. Sei Satz 4 schon bewiesen für einen Kreis mit dem Radius R. Dann gilt er auch noch für $R_2 = R + \frac{1}{12 M l_2}$. Man setze wieder $R_1 = R - \frac{1}{12 M l_1}$, dann kann man die Sätze 4 und 5d für den Kreis $x^2 + y^2 < R^2$ und den Kreisring $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ anwenden. Man definiere nun $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ durch folgende Differentialgleichungen:

für $x^2 + y^2 < R^2$:	für $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$:
$L(u_0) = d, \quad u_0(R) = 0;$	$L(v_0) = d, \quad v_0(R_1) = u_0(R_1);$
$L(u_n) = 0, \quad u_n(R) = v_{n-1}(R) \quad (n \geqq 1)$	$L(v_n) = 0, \quad v_n(R_1) = u_n(R_1) \quad (n \geqq 1),$
	$v_n(R_2) = 0 \quad (n \geqq 0).$

Danach folgt schrittweise für ein q $(0 < q < 1)$:

$$|u_0(R_1)| < \|d\|_{R_2}, \qquad |v_0(R)| < q\,\|d\|_{R_2};$$
$$|u_n(R_1)| < q^n\,\|d\|_{R_2}, \qquad |v_n(R)| < q^{n+1}\,\|d\|_{R_2}.$$

Nun setze man $u = \sum u_n$, $v = \sum v_n$, dann folgt

$$|u(R_1)| < \|d\|_{R_2} \sum_0^\infty q^n = \|d\|_{R_2} \frac{1}{1-q}, \quad |v(R)| < \|d\|_{R_2} \sum_1^\infty q^n = \|d\|_{R_2} \frac{q}{1-q}.$$

Mit Satz 5d folgt $|u_n|_{0\varrho} < \dfrac{\lambda_0 q\,\|d\|_{R_2}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^2}$ und dasselbe für die ersten Ableitungen. Also konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $x^2 + y^2 < R^2$ auch die ersten Ableitungen der u_n gleichmäßig. Dasselbe schließt man mit Satz 1 für die zweiten Ableitungen. (Die Umgebung von $\varrho = 0$ kann wieder unschädlich gemacht werden durch Einführung der Variablen $x'(x, y)$, $y'(x, y)$.) Also ist $L(u) = 0$ für $x^2 + y^2 < R^2$. Ebenso findet man $L(v) = 0$ für $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$. Nach Definition ist aber $u(R_1) = v(R_2)$ und $u(R) = v(R)$. u und v sind also zwischen R_1 und R identisch, stellen also für $x^2 + y^2 < R_2^2$

eine Funktion $z(x, y)$ dar, die $L(z) = d$ erfüllt. Für sie gilt ferner $|z|_{0R_2} < |u|_{0R_0} + |v|_{R_0R_2}$. Nach Satz 5d bzw. Satz 5c ist

$$|u|_{0R_2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(1 - \frac{R_0}{R}\right)^2} = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{R_0}{R}\right)^2} \frac{\|d|_{R_2}}{1-q} = \lambda' |d|_{R_2};$$

$$|v|_{R_0R_2} < \frac{\lambda_0 N}{\left(\frac{R_0}{R_1} - 1\right)^2} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{R_0}{R_1} - 1\right)^2} \frac{q}{1-q} \|d|_{R_2} = \lambda'' \|d|_{R_2}.$$

Dasselbe beweist man für z_x und z_y. Führt man nun wie durch (8) zum Satz 2 die Variabeln $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ ein, so kann man für z, z_x und z_y in bezug auf x', y' natürlich genau dieselben Beziehungen ableiten. Daher gelten für die erweiterten Moduln die drei ersten der Formeln (16) im Kreise mit R_2. Dieselben Ungleichungen für die zweiten Ableitungen sind nach Satz 2 eine unmittelbare Folge der Gleichung $\Delta z = d - a z_x - b z_y - c z$. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

§ 3. Die Gleichung

$$A z_{xx} + 2B z_{xy} + C z_{yy} + D z_x + E z_y + F z = G.^{8})$$

Satz 6. *Seien $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $D(x, y)$, $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ analytische*[9]) *Funktionen in einem gewissen Gebiet der x, y-Ebene. Γ sei ein einfach zusammenhängender abgeschlossener Teilbereich davon mit analytischer Randkurve. In Γ sei $AC - B^2 \geqq k > 0$, $AF \leqq 0$. Auf dem Rande C von Γ verschwinde $z(x, y)$, und im Innern sei $\Lambda(z) \equiv A z_{xx} + 2B z_{xy} + C z_{yy} + D z_x + E z_y + F z = G(x, y)$. Dann gibt es eine gewisse Variablentransformation*

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

die Γ in den Kreis K mit vorgeschriebenem Radius R um $\xi = \eta = 0$ so überführt, daß z als Funktion von ξ, η die Ungleichungen

$$(26) \quad \begin{cases} \|z|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R, \\ \left\|\frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial x}\right|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R, \quad \left\|\frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial y}\right|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R, \\ \left\|\frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial x^2}\right|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R, \quad \left\|\frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial x \partial y}\right|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R, \\ \left\|\frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial y^2}\right|_R < \mu \|G(\xi, \eta)|_R \end{cases}$$

8) Vgl. S. Bernstein, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet* II, Math. Ann. 69 (1910), 82—136.

9) Geringere Voraussetzungen würden genügen.

erfüllt. Darin soll μ nur von R und A, B, C, D, E, F abhängen, aber nicht von G. Die erweiterten Moduln sind in bezug auf ξ, η als Variable aufzufassen. Es kann auch verlangt werden, das ein beliebiger Punkt P von Γ in $\xi = \eta = 0$ übergeht.

Beweis: Zunächst werde Γ als ein Kreis vorausgesetzt und P als Mittelpunkt. Die Funktionen $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ wähle man so, daß sie den Ausdruck $\Delta(z)$ in einen von der Form $L(z)$ überführen. Dabei mögen $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ erstens den Kreis Γ eineindeutig auf den Kreis K so abbilden, daß die Mittelpunkte sich entsprechen, zweitens jede für sich der Gleichung

$$
\begin{aligned}
(27)\quad & A z_{xx} + 2B z_{xy} + C z_{yy} \\
& + \left(A_x + B_y - A \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{AC - B^2} - B \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{AC - B^2}\right) z_x \\
& + \left(B_x + C_y - B \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{AC - B^2} - C \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{AC - B^2}\right) z_y = 0
\end{aligned}
$$

genügen. Dann geht bekanntlich (wie man auch leicht ausrechnet) $\Delta(z) = G$ über in die Gleichung

$$
(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + a \dfrac{\partial z}{\partial \xi} + b \dfrac{\partial z}{\partial \eta} + F(\xi, \eta)\, z = G(\xi, \eta), \\ a(\xi, \eta) = A \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2B \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + C \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + D \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + E \dfrac{\partial \xi}{\partial y}, \\ b(\xi, \eta) = A \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2B \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + C \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + E \dfrac{\partial \eta}{\partial y}. \end{cases}
$$

Hieraus ergeben sich nach Satz 4 sofort

$$
\|z(\xi, \eta)\|_R < \mu' \|G(\xi, \eta)\|_R, \quad \left\| \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right\|_R < \mu' \|G\|_R, \quad \ldots,
$$

$$
\left\| \frac{\partial^2 z(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right\|_R < \mu' \|G\|_R,
$$

worin μ' nur von A, B, C, D, E, F abhängt, wenn man Schranken für die erweiterten Moduln der ersten und zweiten Ableitungen von $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ kennt, wenn man also Schranken für $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ und ihre ersten bis vierten Ableitungen kennt. Dann kann man in den letzten Ungleichungen aber auch die ersten und zweiten Ableitungen von z nach ξ, η durch die nach x, y ersetzen, denn es ist ja z. B. $z_x = z_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \dfrac{\partial \eta}{\partial x}$. Die Ungleichungen (26) sind damit bewiesen, wenn es gelingt, zwei Lösungen $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ der Gleichung (27) so zu finden, daß sie Γ in K eineindeutig so transformieren, daß dabei die ersten bis vierten Ableitungen beschränkt sind (und die Mittelpunkte sich entsprechen).

Es werde nun als bekannt vorausgesetzt, daß die Randwertaufgabe der Gleichung (28) lösbar ist und daß eine Lösung (bis in den Rand) beschränkte erste bis vierte Ableitungen hat, wenn die Randwerte geeignet gewählt, z. B. analytisch sind. Es kommt dann nur noch darauf an, auf dem Rande des Kreises Γ zwei analytische Funktionen $\xi(\vartheta)$, $\eta(\vartheta)$ so zu wählen, daß die zugehörigen Lösungen der Randwertaufgabe von (27) das Gebiet Γ *eineindeutig* auf K abbilden (und daß die Mittelpunkte sich entsprechen). S. BERNSTEIN[8]) gibt ein Beispiel, wie man solche Randfunktionen wählen kann.

Ist Γ nicht als Kreis vorausgesetzt, so führe man erst eine konforme Abbildung von Γ auf K durch. Dabei geht der elliptische Ausdruck $A(z)$ wieder in einen elliptischen $A_1(z)$ über, und man kann einen beliebigen Punkt in den Mittelpunkt überführen. Dann führe man dieselbe Betrachtung durch wie eben.

Damit ist Satz 6 bewiesen; er liefert das Haupthilfsmittel beim Beweise der späteren Sätze für nichtlineare Gleichungen. Ferner braucht man noch einen Satz über die Gleichung $A(z) = 0$.

Satz 7. *Sei* $z(x, y)$ *für* $x^2 + y^2 < R^2$ *Lösung von* $A(z) = 0$. *Die Randwerte seien* $\varphi(\vartheta) = \sum_0^\infty c_n \cos n\vartheta + d_n \sin n\vartheta$, *und es existiere* $\sum n^2 |c_n| + n^2 |d_n| = N$. *Dann gilt*

$$\|z\|_R < \mu^* \frac{N}{R^2}, \quad \|z_x\|_R < \mu^* \frac{N}{R^2}, \quad \ldots, \quad \|z_{yy}\|_R < \mu^* \frac{N}{R^2}$$

(μ^* abhängig wie μ im Satz 6).

Beweis: Sei zunächst $A(z) = \Delta(z)$, dann ist

$$z = \sum c_n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \cos n\vartheta + d_n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \sin n\vartheta, \quad \|z\|_R = \sum |c_n| + |d_n| < N,$$

$$\|z_\varrho\|_R = \sum \frac{n|c_n| + n|d_n|}{R} < \frac{N}{R}, \quad \frac{z_{\vartheta\vartheta}}{\varrho^2} = \sum \frac{n^2|c_n| + n^2|d_n|}{R^2} = \frac{N}{R^2} \text{ usw.}$$

Sei jetzt $A(z) = \Delta(z) + a z_x + b z_y + c z$. Für hinreichend kleines R beweist man Satz 7 dann direkt durch sukzessive Approximationen, wie mehrfach durchgeführt. Um ihn für einen beliebig großen Kreis zu beweisen, kann man sich wieder des alternierenden Verfahrens bedienen. Dies sei jedoch nicht ausgeführt. Ist $A(z)$ von der allgemeinen Form $A z_{xx} + 2B z_{xy} + C z_{yy} + D z_x + E z_y + F z$, so folgert man Satz 7 genau so wie Satz 6 aus Satz 4.

§ 4. Nichtlineare Gleichungen.[10])

Sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der reellen x, y-Ebene mit analytischer Randkurve. Sei $z_0(x, y)$ in Γ definiert mit stetigen und beschränkten ersten bis vierten Ableitungen. S' sei eine Schranke. Sei $F(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha)$ eine Funktion von folgenden Eigenschaften:

1. F ist definiert für alle x, y aus Γ und zu jedem x, y für

$$\left|r - \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right| \leqq \varepsilon, \quad \left|s - \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y}\right| \leqq \varepsilon, \quad \ldots, \quad |z - z_0| \leqq \varepsilon, \quad |\alpha| \leqq \varepsilon.$$

2. In diesem neundimensionalen Bereich B ist F mit den beiden ersten partiellen Ableitungen nach x und y in allen neun Variablen analytisch und beschränkt, S sei eine Schranke dafür.

3. In B ist F elliptisch, d. h. es ist

$$4\frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2 \geqq k > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} \geqq 0.$$

4. Endlich ist in Γ

$$F\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}, z_0, x, y; 0\right) = 0,$$

$z_0(x, y)$ also Lösung der (i. allg. nichtlinearen) elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung $F = 0$ für $\alpha = 0$. Dann gilt

Satz 8 (Parametersatz). *Es gibt ein ε^* und eine nach x und y zweimal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y; \alpha)$, die für jedes feste α mit $|\alpha| \leqq \varepsilon^*$ in Γ die elliptische Differentialgleichung*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y; \alpha\right) = 0 \tag{29}$$

löst, und die auf dem Rande von Γ mit $z_0(x, y)$ übereinstimmt.

Beweis: 1. Man definiere eine Folge von Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ durch folgende Differentialgleichungen. Man setze rein formal $z = z_0 + \alpha z_1 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} z_n + \cdots$ in $F(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha)$ ein und bilde den Ausdruck

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} F(r, s, \ldots, x, y; \alpha)|_{\alpha=0}. \tag{30}$$

Sind $z_1, \ldots, z_{n-1}$ schon erklärt, so erhält man durch Nullsetzen von (30) eine lineare elliptische Differentialgleichung für z_n:

$$F_r|_{\alpha=0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + F_s|_{\alpha=0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + \cdots + F_z|_{\alpha=0} z_n = A_n(x, y), \tag{31}$$

wo in $A_n(x, y)$ nur $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ vorkommen. Auf dem Rande von Γ verlange man (für $n \geqq 1$) $z_n = 0$. Dann sind die z_n eindeutig definiert.

10) Vgl. hierzu S. Bernstein, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du type elliptique* II, Math. Ann. 96 (1927), S. 633—647, doch wird dort F als ganze Funktion vorausgesetzt.

2. Aus (31) folgt nach Satz 6 sofort

$$(32)\quad \|z_n\|_R < \lambda \|A_n\|_R, \quad \left\|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\|_R < \lambda \|A_n\|_R, \quad \ldots, \quad \left\|\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right\|_R < \lambda \|A_n\|_R$$

(λ nur abhängig von $F_r|_{\alpha=0}, F_s|_{\alpha=0}, \ldots, F_z|_{\alpha=0}$ und R). Die erweiterten Moduln beziehen sich auf die Variabeln ξ, η des Satzes 6. (R kann beliebig angenommen werden, etwa $R = 1$.)

3. Man setze $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = r_0$, $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} = s_0$, ... Dann kann man, da F in B analytisch ist, im Bereich

$$(33)\quad |r - r_0| \leqq \varepsilon, \quad |s - s_0| \leqq \varepsilon, \quad \ldots, \quad |z - z_0| \leqq \varepsilon, \quad |\alpha| \leqq \varepsilon$$

F in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} F(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha) = {} & F|_{\alpha=0} + (r - r_0) F_r|_{\alpha=0} + (s - s_0) F_s|_{\alpha=0} \\ & + (t - t_0) F_t|_{\alpha=0} + (p - p_0) F_p|_{\alpha=0} + (q - q_0) F_q|_{\alpha=0} \\ & + (z - z_0) F_z|_{\alpha=0} + \Phi(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi = \alpha F_\alpha|_{\alpha=0} + \sum_{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7 = 2}^{\infty} \frac{(r - r_0)^{\varkappa_1} (s - s_0)^{\varkappa_2} (t - t_0)^{\varkappa_3} (p - p_0)^{\varkappa_4} (q - q_0)^{\varkappa_5} (z - z_0)^{\varkappa_6} \alpha^{\varkappa_7}}{\varkappa_1! \quad \varkappa_2! \quad \varkappa_3! \quad \varkappa_4! \quad \varkappa_5! \quad \varkappa_6! \quad \varkappa_7!} \cdot \frac{\partial^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_7} F(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha)}{\partial r^{\varkappa_1} \partial s^{\varkappa_2} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}}\Big|_{\alpha=0}.$$

4. Diese Reihe konvergiert für hinreichend kleine $r - r_0$, $s - s_0$, ..., $z - z_0$, α auch dann noch, wenn man $\frac{\partial^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r, \ldots; \alpha)}{\partial r^{\varkappa_1} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}}\Big|_{\alpha=0}$ durch seinen erweiterten Modul (in bezug auf ξ, η) ersetzt. Das erkennt man so: Um diesen erweiterten Modul beschränken zu können, genügt es, den absoluten Betrag dieser Funktionen sowie den der ersten und zweiten Ableitungen nach x und y zu beschränken.[11]) Nun ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r, \ldots; \alpha)}{\partial r^{\varkappa_1} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}}\Big|_{\alpha=0} = {} & \frac{\partial^{1 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r_0, s_0, \ldots, x, y; 0)}{\partial r^{1 + \varkappa_1} \partial s^{\varkappa_2} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}} \\ & + \frac{\partial^{1 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r_0, \ldots; 0)}{\partial r^{\varkappa_1} \partial s^{1 + \varkappa_2} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}} + \cdots + \frac{\partial^{1 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r_0, \ldots; 0)}{\partial r^{\varkappa_1} \ldots \partial z^{1 + \varkappa_6} \partial \alpha^{\varkappa_7}} \\ & + \frac{\partial^{1 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r_0, \ldots; 0)}{\partial r^{\varkappa_1} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7} \partial x}. \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit von F und B folgt

$$\left|\frac{\partial^{1 + \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_7} F(r_0, \ldots; 0)}{\partial r^{1 + \varkappa_1} \partial s^{\varkappa_2} \ldots \partial \alpha^{\varkappa_7}}\right| < \frac{\varkappa_1! \, \varkappa_2! \ldots \varkappa_7! \, S}{\varepsilon^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_7}}.$$

11) Vgl. Gleichung (3). Eigentlich müßte man die Ableitungen nach ξ, η betrachten, aber diese lassen sich ja durch die nach x, y abschätzen.

Ferner ist nach Voraussetzung $\frac{\partial r_0}{\partial x} < S'$ usw., also die Summe der ersten sechs Glieder kleiner als $\frac{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_7!\,6\,S\,S'}{\varepsilon^{1+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}}$. Für das 7. Glied folgt aus der Voraussetzung ebenso

$$\left|\frac{\partial^{1+\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r_0,\ldots;\,0)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}\partial x}\right| < \frac{\varkappa_1!\ldots\varkappa_7!\,S}{\varepsilon^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}},$$

also

$$\left|\frac{d}{dx}\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r,\ldots;\,\alpha)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_{\alpha=0} < \frac{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_7!\,S_1}{\varepsilon^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}};$$

dasselbe ergibt sich natürlich für $\left|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r_0,\ldots;\,0)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|$ selbst und die andern ersten und zweiten Ableitungen nach x und y. Hieraus folgt nach (3)

$$\left\|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r_0,\ldots;\,0)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_R < \frac{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots\varkappa_7!\,S_2}{\varepsilon^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}}\,^{12}),$$

also ergibt sich, daß in jedem Teilbereiche von (33) die Reihe

$$(34)\quad \Phi^* = \alpha\,\|F_\alpha|_{\alpha=0}|_R + \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7=2}^{\infty}\frac{(r-r_0)^{\varkappa_1}\ldots(z-z_0)^{\varkappa_6}\alpha^{\varkappa_7}}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_6!\,\varkappa_7!}\cdot\left\|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r_0,\ldots;\,0)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_{\alpha=0}\Big|_R$$

gleichmäßig in $r-r_0$, $s-s_0$, $\ldots$, $z-z_0$, α konvergiert.

5. In Anlehnung an (34) sei

$$(35)\quad \Phi^{**}(a,\alpha) = \alpha\,\|F_\alpha|_{\alpha=0}|_R + \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7=2}^{\infty}\frac{a^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_6}\alpha^{\varkappa_7}}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_6!\,\varkappa_7!}\left\|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7}F(r,s,\ldots,x,y;\,\alpha)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial z^{\varkappa_6}\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_{\alpha=0}\Big|_R.$$

Ferner sei $a(\alpha)$ diejenige analytische Funktion von α:

$$a(\alpha) = \alpha a_1 + \frac{\alpha^2}{2!}a_2 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}a_n + \cdots,$$

welche die Gleichung

$$(36)\qquad \lambda\,\Phi^{**}(a,\alpha) - a = 0$$

in der Umgebung von $\alpha = 0$ löst (λ dasselbe wie in (32)). Die Reihe für $a(\alpha)$ konvergiert für ein gewisses ε' und $|\alpha| < \varepsilon'$.[13]) Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ erhält man bekanntlich dadurch, daß man

12) S_2 hängt nur von S_1, also nur von S und S' ab; $S_1 = 6\,S\,S' + S$.

13) ε' läßt sich nach der Majorantenmethode bestimmen (vgl. Bieberbach, *Lehrb. d. Funkt. Th.* Bd. I, 2. Aufl., S. 191). Es hängt nur von λ, S_2 und ε ab, also von λ, S, S' und ε.

die Reihe für $a(\alpha)$ rein formal in $\Phi^{**}(a, \alpha)$ einsetzt, nach wachsenden Potenzen von α ordnet und dann in (36) die Koeffizienten von α^ν einzeln gleich Null setzt:

$$\lambda \frac{d^n}{d\alpha^n} \Phi^{**}(a(\alpha), \alpha) - a_n = 0. \tag{37}$$

Nach der Definition von A_n erhält man $\frac{d^n}{d\alpha^n} \Phi^{**}(a, \alpha)$, indem man in A_n die $r_\nu, s_\nu, t_\nu, p_\nu, q_\nu, z_\nu$ (das sind die z_ν und ihre ersten und zweiten Ableitungen nach x und y, $\nu \leqq n-1$) durch die a_ν und ihre Koeffizienten durch deren erweiterte Moduln ersetzt. In (37) ist also die linke Seite eine Summe von Produkten, deren Faktoren aus den $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ und einem festen *positiven* Faktor, dem Koeffizienten c_{mk} $(m+k=n)$ von $a^m \alpha^k$ in (35), genommen werden. Zum Beispiel wird

$$c_{01} - a_1 = 0 \quad \text{für } n = 1,$$

$$c_{02} + c_{11} a_1 + c_{20} a_1^2 - \frac{a_2}{2!} = 0 \quad \text{für } n = 2,$$

$$c_{03} + c_{11} \frac{a_2}{2!} + c_{12} a_1 + 2 c_{20} \frac{a_1 a_2}{2!} + c_{21} a_1^2 + c_{30} a_1^3 - \frac{a_3}{3!} = 0 \quad \text{für } n = 3.$$

Nun setze man $b_n = \operatorname{Max}\left(|z_n|_R, \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|_R, \ldots, \left|\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right|_R \right)$. Dann folgt nach (32) $b_n < \lambda |A_n|_R$. Hier wird $|A_n|_R$ vergrößert zu $|A_n|'$, wenn man in A_n die $z_\nu, \frac{\partial z_\nu}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z_\nu}{\partial y^2}$ $(\nu \leqq n-1)$ durch die b_ν und die Koeffizienten durch ihre erweiterten Moduln ersetzt, so daß erst recht $b_n < \lambda |A_n|'$ ist. $|A_n|'$ ist aber nach der Definition von A_n gleich $\frac{d^n}{d\alpha^n} \Phi^{**}(a, \alpha)$, wenn man darin die a_ν durch die b_ν ersetzt (s. Bem. zu (37)). Mit (37) folgt nun $b_n < a_n$. Denn sei dies schon für $\nu \leqq n-1$ bewiesen. Dann folgt

$$|A_n|' \leqq \frac{d^n}{d\alpha^n} \Phi^{**}(a(\alpha), \alpha),$$

also mit (37)

$$b_n < \lambda |A_n|' \leqq \lambda \frac{d^n}{d\alpha^n} \Phi^{**}(a, \alpha) = a_n.$$

Für $n = 1$ ist $A_1 = \left.\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$, also $a_1 = \lambda \left|F_\alpha|_{\alpha=0}\right|_R$ und nach (32) $b_1 < \lambda \left|F_\alpha|_{\alpha=0}\right|_R$. Daraus folgt, daß die Reihe $\alpha b_1 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} b_n + \cdots$ mindestens den gleichen Konvergenzradius besitzt wie $a(\alpha)$ und daß sie also für $|\alpha| < \varepsilon'$ eine analytische Funktion $b(\alpha)$ darstellt.

6. Nach Definition von b_n konvergieren also die Reihen

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} |z_n|_R, \quad \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} \left|\frac{\partial z^n}{\partial x}\right|_R, \quad \ldots, \quad \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} \left|\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right|_R.$$

Folglich konvergiert in Γ für $|\alpha| < \varepsilon'$ die Reihe $\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} z_n(x, y)$ samt den formal gebildeten ersten und zweiten Ableitungen nach x, y gleichmäßig und absolut. Sie stellt also dort eine in α analytische, nach x und y zweimal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y)$ dar. Für ein gewisses ε^* und $|\alpha| < \varepsilon^*$[14]) wird $\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n!} \|z_n\|_R < \varepsilon$, also $|z - z_0| < \varepsilon$, und dasselbe gilt für die beiden ersten Ableitungen. Für $|\alpha| \leqq \varepsilon^*$ kann man also $z(x, y; \alpha)$ in die Funktion $F(r, s, t, p, q, z, x, y; \alpha)$ einsetzen. Nun ist

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots; \alpha\right) = F\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}, \ldots; \alpha\right)\Big|_{\alpha=0} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots; \alpha\right)\Big|_{\alpha=0} + \cdots.$$

Nach (30) sind aber die z_n gerade so definiert, daß alle Glieder rechts verschwinden. Also ist $z(x, y; \alpha)$ eine Lösung von (29) in Γ für $|\alpha| < \varepsilon^*$. Ferner stimmen die Randwerte von z mit denen von z_0 überein, da die Randwerte von $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sämtlich verschwinden. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Aus dem Verlauf der Untersuchung geht (wie schon angedeutet) noch hervor, daß die Zahl ε^* nur abhängt von $F_r|_{\alpha=0}$, $F_s|_{\alpha=0}$, $F_t|_{\alpha=0}$, $F_p|_{\alpha=0}$, $F_q|_{\alpha=0}$, $F_z|_{\alpha=0}$ (wodurch λ bestimmt wird) und von S, S' und ε.

Man kann zeigen, daß $z(x, y; \alpha)$ auch beschränkte dritte und vierte Ableitungen besitzt. Dann läßt sich das Verfahren, das zum Satz 8 führte, natürlich fortsetzen, indem man es auf eine Lösung $z(x, y; \alpha_0)$ mit $0 < |\alpha_0| < \varepsilon^*$ anwendet, anstatt auf $z_0(x, y)$. Man kommt jedoch nicht zu einer allgemeinen Aussage darüber, bis zu welchen Werten α man so gelangen kann, weil bei einer Wiederholung des Verfahrens im allgemeinen 1. die Schranke für $z(x, y; \alpha_0)$ und die ersten bis vierten Ableitungen nicht dieselbe, S', sein wird wie für $z_0(x, y)$, und weil 2. der Abstand der Anfangslösung $z(x, y; \alpha_0)$ (und ihrer ersten und zweiten Ableitungen) vom Rande des Bereiches B nicht mehr derselbe, ε, sein wird wie für $z_0(x, y)$. In speziellen Fällen kann man jedoch

---

14) ε^* soll so bestimmt werden, daß $\left|\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n!} z_n\right| < \varepsilon, \ldots, \left|\sum_1^\infty \frac{\alpha_n}{n!} \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right| < \varepsilon$ wird. Dazu genügt es, ε^* so klein zu machen, daß $b(\alpha) < \varepsilon$ wird. ε^* hängt also wieder nur von λ, S, S' und ε ab.

wissen, daß diese Schranken sich nicht verändern, und dann läßt sich das Verfahren beliebig oft wiederholen.

Satz 8 läßt sich so erweitern, daß der Parameter α nicht nur in der Gleichung, sondern auch in den Randwerten vorkommt.

Satz 9. *Unter den Voraussetzungen zu Satz 8 seien $\varphi(t)$ die Werte von $z_0(x, y)$ auf dem Rande von Γ und sei $\psi(t)$ eine ebenfalls auf dem Rande definierte Funktion mit stetigen ersten bis dritten Ableitungen, für die N eine Schranke ist. Dann gibt es ein ε^* und eine nach x und y zweimal stetig differenzierbare Funktion $z(x, y; \alpha)$, die für jedes α mit $|\alpha| < \varepsilon^*$ in Γ die Gleichung* (29) *erfüllt, und die auf dem Rande die Werte $\varphi(t) + \alpha\psi(t)$ annimmt.*[15])

Beweis: Durch die schon eingeführten Funktionen $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ wird der Rand von Γ in die Peripherie des Kreises mit R um o übergeführt, und $\psi(t)$ geht dabei in eine Funktion $\psi(\vartheta)$ des Kreisbogens über, deren erste bis dritte Ableitungen nach ϑ man durch $N' = kN$ beschränken kann, wobei k nur von $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ abhängt. Nun setze man $\psi''(\vartheta) = \sum_0^\infty c_n'' \cos n\vartheta + d_n'' \sin n\vartheta$. Dann ist die durch gliedweise Differentiation formal gebildete Reihe für $\psi'''(\vartheta)$ die Reihe $\sum -n c_n'' \sin n\vartheta + n d_n'' \cos n\vartheta$ mit $\sum n^2 c_n''^2 + n^2 d_n''^2 = 2N'^2$, also

$$\sum |c_n''| + |d_n''| \leqq \sqrt{\sum n^2 c_n''^2 + n^2 d_n''^2} \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}} = \sqrt{2N'^2 \frac{\pi^2}{6}} \leqq k' N.$$

Setzt man nun

$$\psi(\vartheta) = \sum c_n \cos n\vartheta + d_n \sin n\vartheta,$$

so folgt daraus

(38) $\sum n^2 |c_n| + n^2 |d_n| \leqq k^* N$ (k^* nur von $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ abhängig).

Der Beweis von Satz 9 läuft nun dem von Satz 8 völlig parallel, daher genügt es, die Stellen anzuführen, an denen Abweichungen auftreten.

Zunächst erklärt man die Folge der Funktionen $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ wieder durch (31). Man verlange auch wieder Randwerte Null, nur für $n = 1$ verlange man $z_1(\vartheta) = \psi(\vartheta)$, dann folgt wieder (32), aber nur für $n > 2$, während für $n = 1$ gilt: $z_1 = z_1' + z_1''$, $A(z_1') = \left.\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$ mit Randwerten Null, $A(z_1'') = 0$ mit Randwerten $\psi(\vartheta)$. Für $n = 1$ gilt (32) also für z_1', während für z_1'' (38) gilt, so daß nach Satz 7

(39) $\|z_1''\|_R < \lambda^* \frac{N}{R^2}$, $\left\|\frac{\partial z_1''}{\partial x}\right\|_R < \lambda^* \frac{N}{R^2}$, $\ldots$, $\left\|\frac{\partial^2 z_1''}{\partial y^2}\right\|_R < \lambda^* \frac{N}{R^2}$

15) Der Fall, daß nur die Randwerte von α abhängen und F in α konstant ist, fällt natürlich mit unter Satz 9.

ist. Schreibt man also für die größere der beiden Zahlen λ aus (32) und λ^* aus (39) wieder einfach λ, so gilt

$$\|z_1\|_R < \lambda\left(\|A_n\|_R + \frac{N}{R^2}\right) \text{ und das gleiche für } \frac{\partial z_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}.$$

Weiter schließt man wie in Satz 8, nur setzt man

$$\Phi^* = \alpha\left(\|F_\alpha|_{\alpha=0}\|_R + \frac{N}{R^2}\right) + \sum_{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7=2}^{\infty} \frac{(r-r_0)^{\varkappa_1}\ldots\alpha^{\varkappa_7}}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_7!} \left\|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7} F(r,\ldots;\alpha)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_{\alpha=0}\Big|_R,$$

$$\Phi^{**} = \alpha\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right\|_R + \frac{N}{R^2}\right) + \sum_{2}^{\infty} \frac{\alpha^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_6}\alpha^{\varkappa_7}}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_7!} \left\|\frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_7} F(r,\ldots;\alpha)}{\partial r^{\varkappa_1}\ldots\partial\alpha^{\varkappa_7}}\right|_{\alpha=0}\Big|_R.$$

Dann schließt man völlig parallel bis zum Schluß, nur muß überall $\left\|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right\|_R$ durch $\left\|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right\|_R + \frac{N}{R^2}$ ersetzt werden, und daher hängt ε^* außer von den dort genannten Größen noch von $\frac{N}{R^2}$ ab.

Zum Schluß werde noch bemerkt, daß das dargestellte Verfahren u. a. auch dazu geeignet ist, den *analytischen Charakter der Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen* zu beweisen. Aus der Natur des Verfahrens folgt sofort: *Ist* $z_0(x, y)$ *analytisch, so sind es auch alle übrigen* z_n, *und* $z = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} z_n$ *wird durch eine gleichmäßig konvergente Reihe analytischer Funktionen dargestellt.* Allerdings gilt die gleichmäßige Konvergenz zunächst nur im Reellen. Indes ist es leicht möglich, den Begriff des Moduls nochmals so zu erweitern, daß er auch noch für eine gewisse komplexe Umgebung eines jeden reellen Punktes gilt, und daß für ihn im übrigen alle abgeleiteten Sätze fast unverändert richtig bleiben. Man wird so zu der Tatsache geführt, daß *alle durch das* BERNSTEINsche *Verfahren gefundenen Lösungen* $z(x, y; \alpha)$ *analytisch sind, wenn die Ausgangslösung* $z_0(x, y) = z(x, y; 0)$ *es ist.* Soll nun der analytische Charakter einer Lösung $z(x, y)$ von $F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0$ bewiesen werden, so wird man in F und in die Randwerte von z einen Parameter α so einführen, daß man für $\alpha = 1$ die gegebene Gleichung und die gegebene Lösung erhält, während man für $\alpha = 0$ die Lösung einer elliptischen Differentialgleichung erhält, von der man schon weiß, daß sie analytisch ist. Man muß nur darauf achten, daß bei der Anwendung unseres Verfahrens der Konvergenzradius in α größer als 1 wird.

Lebenslauf.

Am 4. Juni 1907 wurde ich als Sohn des Bankbeamten Alexander von Denffer in Narwa in Estland geboren. Bald nach meiner Geburt zogen meine Eltern nach Mitau in Kurland, wo ich das Landesgymnasium bis zur Sexta besuchte. Im Jahre 1919 wurde mein Vater von den Bolschewisten erschossen, meine Mutter floh mit ihren beiden Söhnen nach Deutschland. Hier war ich zuerst ein halbes Jahr im Waisenhaus der Franckeschen Stiftungen in Halle a. S. und kam dann nach Stettin, wo ich im Februar 1926 die Reifeprüfung am Marienstiftsgymnasium bestand. Meine Absicht, Mathematik zu studieren, wurde mir durch Aufnahme in die „Studienstiftung des Deutschen Volkes" möglich gemacht. Ich studierte zuerst drei Semester in Tübingen, war dann einen Winter in Riga und kam zum Sommersemester 1928 nach Berlin, wo ich im Februar 1932 mein Staatsexamen bestand. Seit Dezember 1933 habe ich eine Anstellung als Versicherungsmathematiker.